264. Интеграл и задача об определении площади. Гораздо важнее истолкование первообразной функции как площади криволинейной фигуры. Так как исторически понятие первообразной функции было теснейшим образом связано с задачей об определении площади, то мы остановимся на этой задаче уже здесь (пользуясь интуитивным представлением о площади плоской фигуры и откладывая точную постановку этого вопроса до главы X).

Пусть дана в промежутке $[a, b]$ непрерывная функция $y=f(x)$, принимающая лишь положительные (неотрицательные) значения. Рассмотрим фигуру $ABCD$ (рис. 2), ограниченную кривой $y=f(x)$, двумя ординатами $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси x; подобную фигуру будем называть *криволинейной трапецией*. Желая определить величину площади P этой фигуры, мы изучим поведение площади *переменной* фигуры $AMND$, заключенной между начальной ординатой $x=a$ и ординатой, отвечающей произвольно выбранному в промежутке $[a, b]$ значению x. При изменении x эта последняя площадь будет соответственно изменяться, причем каждому x отвечает вполне определенное ее значение, так что площадь криволинейной трапеции $AMND$ является некоторой функцией от x; обозначим ее через $P(x)$.

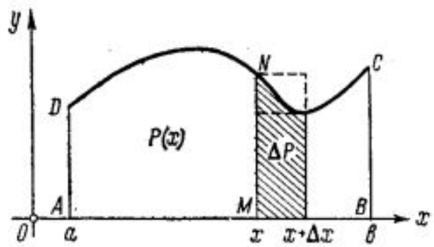

Рис. 2.

Поставим себе сначала задачей *найти производную этой функции*. С этой целью придадим x некоторое (скажем, положительное) приращение Δx; тогда площадь $P(x)$ получит приращение ΔP.

Обозначим через m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[x, x+\Delta x]$ **[85]** и сравним площадь ΔP с площадями прямоугольников, построенных на основании Δx и имеющих высоты m и M. Очевидно,

$$m\,\Delta x < \Delta P < M\,\Delta x,$$

откуда

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

Если $\Delta x \to 0$, то, вследствие непрерывности, m и M будут стремиться к $f(x)$, а тогда и

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

Таким образом, мы приходим к замечательной теореме (обычно называемой *теоремой Ньютона и Лейбница*):* *производная от переменной площади $P(x)$ по конечной абсциссе x равна конечной ординате $y=f(x)$.*

Иными словами, *переменная площадь $P(x)$ представляет собой первообразную функцию для данной функции $y=f(x)$*. В ряду других первообразных эта первообразная выделяется по тому признаку, что она обращается в 0 при $x=a$. Поэтому, если известна *какая-либо* первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$, и по теореме предыдущего n°

$$P(x) = F(x) + C,$$

то постоянную C легко определить, положив здесь $x=a$

$$0 = F(a) + C, \quad \text{так что} \quad C = -F(a).$$

Окончательно

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

В частности, для получения площади P всей криволинейной трапеции $ABCD$ нужно взять $x=b$:

$$P = F(b) - F(a).$$