5) (а) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, (б) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$, (в) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$, (г) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

Решение. (а) Если положить $t=x^2+1$, то числитель $2x\,dx$ дает в точности dt; интеграл сведется к

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

Заметим, что всегда, когда предложенный интеграл имеет вид

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)},$$

так что в подинтегральном выражении числитель представляет собой дифференциал знаменателя, подстановка $t=f(x)$ сразу приводит к цели

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

По этому образцу имеем

(б) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$ [ср. 4) (б)];

(в) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$;

(г) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C$.