Дадим теперь несколько примеров интегрирования выражений, содержащих двучлены вида a^2-x^2, x^2+a^2 и x^2-a^2. В этих случаях обычно бывает выгодно заменить x тригонометрической или гиперболической функцией от новой переменной t, используя соотношения

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1, \qquad 1+\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1, \qquad 1-\operatorname{th}^2 t=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

8) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Подстановка: $x=a\operatorname{tg} t$*, $dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}$, так что

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C \qquad [\text{см. } \mathbf{267},\ 17)\ (\text{а})].$$

Перейдем теперь к переменной x, полагая $t=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}$ и выражая $\sin t$ и $\cos t$ через $\operatorname{tg} t=\dfrac{x}{a}$. Окончательно

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$