11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

Подстановка: $x = a \sin t$, $dx = a \cos t\, dt$ приводит этот интеграл к такому [см. 6) (а)]:

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C.$$

Но

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

так что окончательно

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C.$$

В заключение рассмотрим еще два примера интегрирования путем замены переменной, где подстановка не столь естественна, как в предыдущих случаях, но зато быстро ведет к цели.