5) $\int x^3 \ln^2 x\,dx$. Имеем

$$\int \ln^2 x\, d\frac{x^4}{4}=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{4}\int x^4 d\ln^2 x=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{2}\int x^3\ln x\,dx,$$

и мы свели дело к интегралу 1). Окончательно

$$\int x^3\ln^2 x\,dx=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4\right)+C=\frac{1}{4}x^4\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right)+C.$$

Так, последовательно, вычисляется интеграл

$$\int x^k \ln^m x\,dx,$$

где $k$ – любое вещественное число ($k\neq -1$), а $m=1, 2, 3, \ldots$ Если применить к этому интегралу формулу интегрирования по частям, положив $u=\ln^m x$, то получим рекуррентную формулу

$$\int x^k\ln^m x\,dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^m x-\frac{m}{k+1}\int x^k\ln^{m-1}x\,dx,$$

по которой вычисление рассматриваемого интеграла сводится к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим на единицу показателем при $\ln x$.

Впрочем, подстановка $t=\ln x$ приводит рассматриваемый интеграл к виду $\int t^m e^{(k+1)t}\,dt$, уже изученному в 3) и 4).