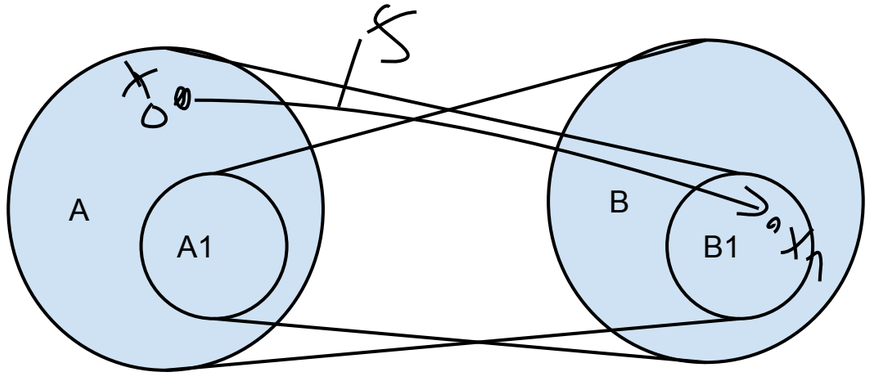


$x = x_0$

пусть xn уже построена, тогда

1) если n - четное то

точка x_n лежит в A

x_n+1 это прообраз точки x_n из множества B под действием функции g

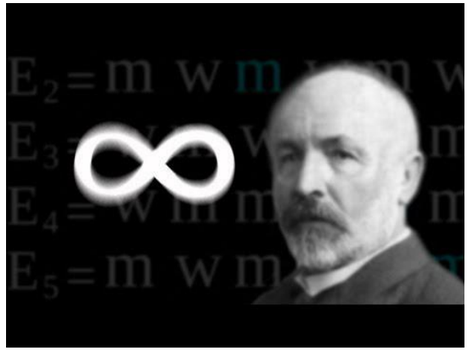
x_n+1 может найтись, а может на найтись

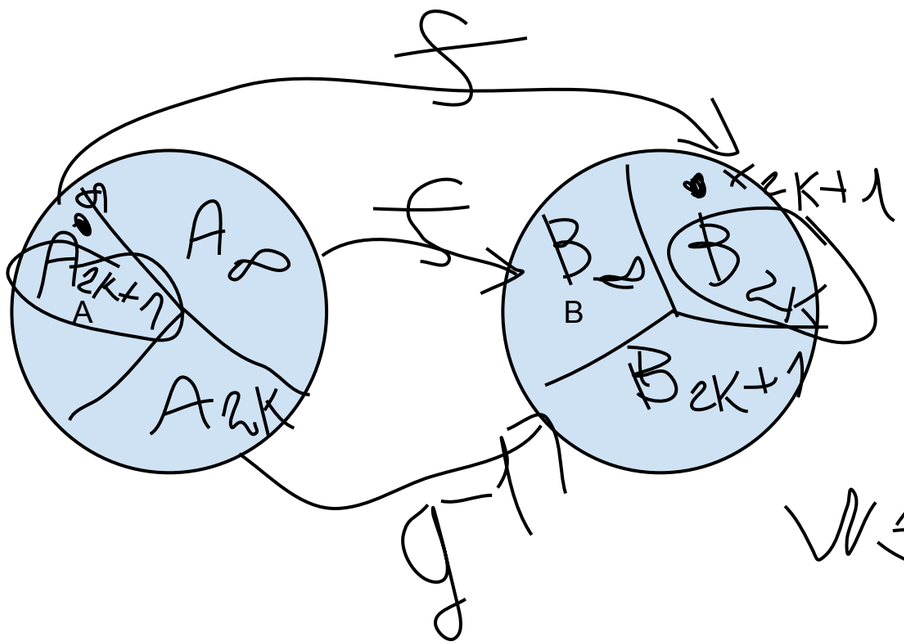
2) если n - нечетное то

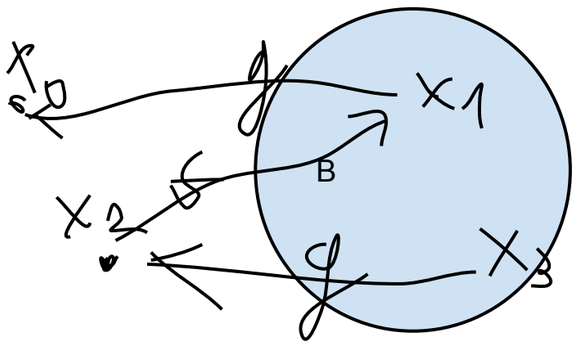
точка x_n лежит в B

x_n+1 это прообраз точки x_n из множества A под действием функции f

x_n+1 может найтись, а может на найтись







$$\psi \begin{cases} f: A_{2k+1} \to B_{2k} \\ f: A_\infty \to B_\infty \\ g^{-1}: A_{2k} \to B_{2k+1} \end{cases}$$

5. Теорема Кантора — Бернштейна. Следующая теорема является одной из основных в теории множеств.

Теорема 2 (Кантор — Бернштейн). *Пусть A и B — два произвольных множества. Если существуют взаимно однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно однозначное отображение g множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что A и B не пересекаются. Пусть x — произвольный элемент из A. Положим $x = x_0$ и определим последовательность элементов $\{x_n\}$ следующим образом. Пусть элемент x_n уже определен. Тогда, если n четно, то за x_{n+1} примем элемент из B, удовлетворяющий условию $g(x_{n+1}) = x_n$ (если такой элемент существует), а если n нечетно, то x_{n+1} — элемент из A, удовлетворяющий условию $f(x_{n+1}) = x_n$ (если он существует). Возможны два случая.

1°. При некотором n элемента x_{n+1}, удовлетворяющего указанным условиям, не существует. Число n называется *порядком элемента x*.

2°. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечна [1]). Тогда x называется *элементом бесконечного порядка*.

Разобьем теперь A на три множества: A_E, состоящее из элементов четного порядка, A_O — множество элементов нечетного порядка и A_I — множество всех элементов бесконечного порядка. Разбив аналогичным образом множество B, заметим, что f отображает A_E на B_O и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_O на B_E. Итак, взаимно однозначное отображение ψ, совпадающее с f на $A_E \cup A_I$ и с g^{-1} на A_O, есть взаимно однозначное отображение всего A на все B.