Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

Решение.

Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4 а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \le S_2 \le S_3 \le S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел $1+2+...+11+12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$. С другой стороны, она равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4S_1$, но 78 не делится на 4. Значит, $A \ne 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i - S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4 поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \ne 1$.

в) Выразим число A явно через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_1) + (S_4 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_2) + (S_4 - S_3) = 3(S_4 - S_3) + 4(S_3 - S_2) + 3(S_2 - S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \ge 3$. Если $A = 3$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1$ или $S_4 = S_2 = S_3 = S_1 + 1$. В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечётна, что неверно.

Для следующего разбиения чисел на группы: $\{12;7\}$; $\{11;6;2\}$; $\{10;5;4;1\}$; $\{9;8;3\}$ — число A равно 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.