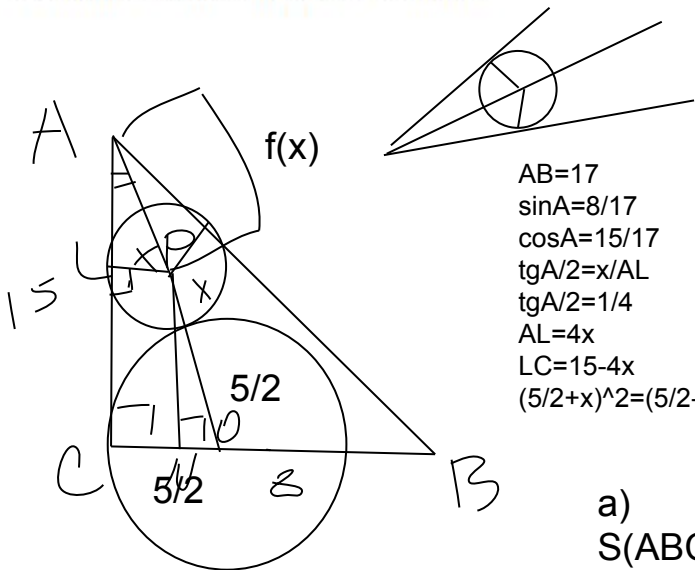


В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты: $AC = 15$, $BC = 8$. Окружность радиуса $2,5$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC .

б) Найдите радиус второй окружности.



$$\begin{aligned}
 AB &= 17 \\
 \sin A &= 8/17 \\
 \cos A &= 15/17 \\
 \operatorname{tg} A/2 &= x/AL \\
 \operatorname{tg} A/2 &= 1/4 \\
 AL &= 4x \\
 LC &= 15 - 4x \\
 (5/2 + x)^2 &= (5/2 - x)^2 + (15 - 4x)^2
 \end{aligned}$$

а)
 $S(ABC) = r(a+b+c)/2$
 $r = 2 \cdot 60 / (15 + 17 + 8) = 3$
 $x < 3 < \frac{1}{4} \cdot 15 = 3.75$

$$\begin{aligned}
 x &< 15/4 \\
 2x &< 15/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin A &= 2 \sin A/2 \cos A/2 / 1 = \\
 &= 2 \sin A/2 \cos A/2 / (\sin^2 A/2 + \cos^2 A/2) = 2 \operatorname{tg} A/2 / (\operatorname{tg}^2 A/2 + 1) = \\
 &= 2z / (z^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8/17 &= 2z / (z^2 + 1) \\
 0 &= [34z - 8(z^2 + 1)] / 17(z^2 + 1) \\
 0 &= 34z - 8(z^2 + 1) \quad z^2 \neq -1 \\
 17z - 4z^2 - 4 &= 0 \\
 z &= 4 \quad z = 1/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25/4 + 5x + x^2 &= 25/4 - 5x + x^2 + 225 - 120x + 16x^2 \\
 16x^2 - 130x + 225 &= 0 \\
 x &= 5/2 \quad \leftarrow \text{Ответ}
 \end{aligned}$$

$x = 45/8$ не подходит по а)
 $AL = x/4$
 $(5/2 + x)^2 = (5/2 - x)^2 + (15 - x/4)^2$
 $-10x + 225 - 15x/2 + x^2/16 = 0$
 $225 - 35x/2 + x^2/16 = 0$

$$\begin{aligned}
 x &< 1/4 AC \\
 x &< 15/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AO &= f(x) + x + 5/2 \\
 AB &= \sqrt{225 + 64} = 17 \\
 AO &= \sqrt{225 + 25/4} = 5\sqrt{37}/2 \\
 \sin A/2 &= 10 / (10\sqrt{37}) = x/AP \\
 AP &= x\sqrt{37} \\
 5\sqrt{37}/2 &= x\sqrt{37} + 5/2 \\
 5\sqrt{37}/2 - 5/2 &= x\sqrt{37} + x \\
 (5\sqrt{37} - 5) / (2(\sqrt{37} + 1)) &= x \\
 5(\sqrt{37} - 1) / (\sqrt{37} + 1) / (2(\sqrt{37} + 1)^2) &= x \\
 5 \cdot 36 / (2(37 + 2\sqrt{37} + 1)) &= x \\
 45 / (19 + \sqrt{37}) &= x \\
 x &= 45(19 - \sqrt{37}) / (361 - 37) \\
 x &= 5(19 - \sqrt{37}) / 36 \\
 x &= (95 - 5\sqrt{37}) / 36
 \end{aligned}$$

