

В прямоугольном треугольнике  $ABC$  известны катеты:  $AC = 15$ ,  $BC = 8$ . Окружность радиуса 2,5 с центром  $O$  на стороне  $BC$  проходит через вершину  $C$ . Вторая окружность касается катета  $AC$ , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем  $\frac{1}{4}$  длины катета  $AC$ .

б) Найдите радиус второй окружности.

$$AB = \sqrt{(225 + 64)} = \sqrt{289} = 17$$

$$x \leq 1/4 AC$$

$$x \leq 15/4$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(A/2) &= x / AK \\ \sin(A) &= 8/17 \\ \cos(A) &= 15/17 \\ \operatorname{tg}(A) &= \sin(A) / \cos(A) = 8/17 * 17/15 = 8/15 \end{aligned}$$

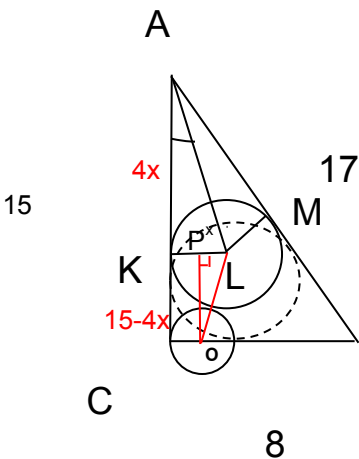
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{1 - 2\sin^2 x} = \\ &= \frac{2\sin x / \cos x}{(1/\cos^2 x) - 2\operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{2\sin x / \cos x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 2\operatorname{tg}^2 x} = \\ &= 2\operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} A = 2\operatorname{tg}(A/2) / (1 - \operatorname{tg}^2(A/2))$$

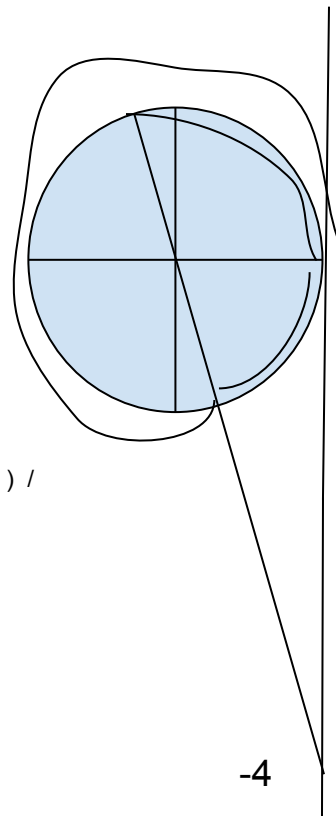
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(A/2) &= y \\ 8/15 &= 2y / (1 - y^2) \\ 8(1 - y^2) &= 30y \\ 8 - 8y^2 - 30y &= 0 \\ 8y^2 + 30y - 8 &= 0 \quad | :2 \\ 4y^2 + 15y - 4 &= 0 \\ D &= 225 + 64 = 17^2 \\ y_1 &= (-15 - 17)/8 = -32/8 = -4 \\ y_2 &= 1/4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(A/2) = 1/4$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$



B



-4

а)  
 $r$  - радиус впис окр-ть  $ABC$   
 $x < r < 15/4$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{((p-a)(p-b)(p-c))/p} = \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 12 / 20} = \sqrt{9} \\ &= 3 \\ \Rightarrow 3 < 15/4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(A/2) = KL/AK = x/AK \Rightarrow AK = x/\operatorname{tg}(A/2) = x/0,25 = 4x$$

$$KC = 15 - 4x$$

$$OL = x + 5/2$$

$$PL = KL - PK = x - 5/2$$

$$(x + 5/2)^2 = (15 - 4x)^2 + (x - 5/2)^2$$

$$x^2 + 5x + 6,25 = 225 - 240x + 16x^2 + x^2 - 5x + 6,25$$

$$-16x^2 + 130x - 225 = 0$$

$$16x^2 - 130x + 225 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = (b/2)^2 - ac$$

$$x_{1,2} = (-b/2 \pm \sqrt{D})/a$$

$$16x^2 - 130x + 225 = 0$$

$$D = 65^2 - 16 \cdot 225 = 4225 - 3600 = 625$$

$$x_1 = (65 - 25)/16 = 40/16 = 10/4 = 5/2$$

$$x_2 = 65 + 25 / 16 = 90/16 = 45/8$$

$$D = 16900 - 4 \cdot 16 \cdot 225 = 2500$$

$$x_1 = 130 - 50 / 32 = 80/32 = 10/4 = 5/2$$

$$x_2 = 130 + 50 / 32 = 180/32 = 45/8 \text{ (не подходит по пункту A)}$$

б) ОТВ: 2,5