Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n > 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 235.

Решение.

а) Да. Например, числа 1, 3, 5, 7 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

б) Так как все данные n чисел натуральные, то наименьшее из них больше или равно 1, а поскольку все эти числа различны (т. е. отличаются друг от друга не менее, чем на 1), то их сумма S не меньше суммы 1 + 2 + ... +, т. е. $S \geq \frac{n(n+1)}{2}$. Если известно, что $S <$ 900, то из неравенства $\frac{n(n+1)}{2} \leq S$ следует, что $\frac{n(n+1)}{2} < 900$, $n(n+1) < 1800$, откуда n < 42 (при $n \geq 42$ имеем: $n(n+1) \leq 42 \cdot 43 > 1800$). При n = 41 имеем: $n(n+1) \leq 41 \cdot 42 < 1800$, натуральные числа от 1 до 41 (без пропусков) составляют арифметическую прогрессию, их количество равно 41, а сумма меньше 900. Таким образом, наибольшее возможное значение n в пункте б) равно 41.

в) Пусть a_1 — наименьшее из данных n чисел, образующих арифметическую прогрессию, d — разность этой прогрессии. Тогда по известной формуле сумма этих n чисел равна $\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Если известно, что сумма данных n чисел равна 235, то $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 470$. Заметим, что $470 = 47 \cdot 10$, число 47 простое и $n < 47$ (в пункте б) доказано, что $n \leq 41$), то n — один из делителей числа 10.

Так как $n \geq 3$, то возможные значения n = 5 или n = 10. Подставим в равенство $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 470$ поочередно n = 5 и n = 10, получаем следующие равенства: $2a_1 + 4d = 94$ и $2a_1 + 9d = 47$. Первое из этих равенств выполняется, например, при $a_1 = 1$, $d = 23$, а второе — при $a_1 = 1$, $d = 5$. Прогрессии 1, 24, 47, 70, 93 и 1, 6, 11, …, 46 состоят из 5 и 10 членов, а их сумма равна 235.

Ответ: а) да; б) 41; в) 5 и 10.