

18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

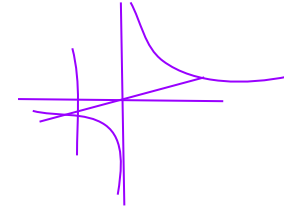
$$\begin{cases} (xy^2 - 3xy - 3y + 9)\sqrt{x+3} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

$$xy^2 - 3xy - 3y + 9 = xy(y-3) - 3(y-3) = (xy-3)(y-3)$$

$$\begin{cases} xy-3=0 \\ y-3=0 \\ x+3>0 \\ y=ax \end{cases}$$

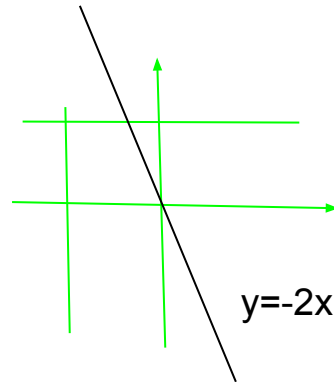
$$\begin{cases} y=3/x \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases}$$



поиск решения  
 $3/x = ax$   
 $x^2 = 3/a$   
 $x = \pm\sqrt{3/a}$   
 $x = \sqrt{3/a}$

поиск решения  
 $ax=3$   
 $x=3/a$



2-ая система  
 $a=0$  0 реш  
 $0 < a < +\infty$  1 реш  $x=3/a$   
 $-\infty < a < -1$  1 реш  
 $-1 \leq a < 0$  0 реш

совм  
 при  $a=0$  0 реш  
 при  $1/3 < a < +\infty$  (3реш)  
 при  $0 < a \leq 1/3$  (2 реш)  
 при  $-\infty < a < -1$  (1 реш)  
 при  $-1 \leq a < 0$  (0 реш)

убираем дубли

$$\begin{aligned} V(3/a) &= 3/a \\ 3/a &= y \\ \forall y &= y \end{aligned}$$

$y = y^2$   
 $y >= 0$   
 $y^2 - y = 0$   
 $y(y-1) = 0$   
 $y = 0 \quad y = 1$   
 $3/a = 0$  реш нет  
 $3/a = 1 \quad a = 3$   
 ОТВЕТ:  $a \in (0; 1/3]$

$$\begin{cases} \begin{cases} xy-3=0 \\ x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-3=0 \\ x+3>0 \end{cases} \\ y=ax \end{cases}$$