

- 2 да
3 нет
4 нет
5 да
6 да
7 нет
8 нет
9 да

Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? ... на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну.

а) Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа? **[3 балла]**

б) А хотя бы на два вопроса? **[5 баллов]**

Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? ... на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну.

а) Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа?

б) А хотя бы на два вопроса?

Решение

а) Покажем, что написанное число чётно. Если бы оно было нечётным, то на вопросы о делимости на 2, 4, 6 и 8 Дима ответил «нет», а тогда, стало быть, на вопросы о делимости на 3, 5, 7 и 9 он ответил "да". Но если число делится на 5, 7 и 9, то оно делится на $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ и не может быть двузначным. Значит, на первый вопрос учительницы можно с уверенностью ответить утвердительно.

б) Рассмотрим три числа – 18, 40 и 56 – и запишем в табличку ответы Димы (плюс означает "да", а минус – "нет").

| | На 2 | На 3 | На 4 | На 5 | На 6 | На 7 | На 8 | На 9 |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 18 | + | + | – | – | + | – | – | + |
| 40 | + | – | + | + | – | – | + | – |
| 56 | + | – | + | – | – | + | + | – |

Мы видим, что на все вопросы, кроме первого, ответы бывают разными, так что более ни на один вопрос гарантированно дать верный ответ мы, не зная числа, не сможем.

Комментарий. Покажем, как можно подобрать числа, приведённые в таблице. Пусть число делится на 8. Это значит, что оно делится также на 2 и на 4. Делиться на 3 оно не может, потому что тогда оно бы делилось ещё и на 6, а ответов "да" Дима дал ровно четыре. Значит, оно не делится на 3, не делится, стало быть, и на 9, а делится на 5 или на 7 (ровно на одно из них). То есть это 40 (или 80) либо 56.

Все три найденных числа делятся на 8 (и на 4) и не делятся на 9. Может быть, так будет всегда? Попробуем построить число, не делящееся на 8 и делящееся на 9. Оно тогда будет делиться на 3, кроме того, оно чётно, а поэтому разделится ещё и на 6. Вот уже четыре ответа "да", и мы получаем 18 (или 54).

Можно показать, что учительница могла написать одно из следующих восьми чисел: 12, 18, 30, 40, 42, 54, 56, 80.

Ответ

а) Да, на первый.

б) Нет, не зная числа, этого гарантированно сделать нельзя.