

Введение в математическую логику

Основы математической логики

Базовые логические операции

Задания для тренировки

Аннотация

На этом уроке мы начнем знакомиться с основными понятиями математической логики, узнаем, какие бывают базовые логические операции и как с их помощью из простых высказываний построить составные.

1. Основы математической логики

Логика

Логика — наука, изучающая методы установления истинности или ложности одних высказываний на основе истинности или ложности других высказываний.

Логическими высказываниями являются утвердительные предложения, о которых можно судить, истинны они или ложны. Причем они не могут быть истинными и ложными одновременно. Логика высказываний рассматривает эти предложения не с точки зрения их смысла, содержания, а только с точки зрения их истинности или ложности.

Классический пример утверждения, не являющегося высказыванием:

Данное предложение ложно.

Если мы предположим, что это утверждение истинно, то придем к противоречию с его содержанием. То же получится, если предположить, что оно ложно.

Также не являются высказываниями:

-Восклицательные, повелительные, вопросительные предложения.

-Бессмысленные предложения.

-Неравенства.

-Утверждения, содержащие переменные.

Если высказывание истинно, то его значение равно **1**, если ложно – то **0**.

Примеры:

Волга впадает в Каспийское море.	Высказывание (истинное)
А баба Яга против!	Не высказывание – восклицательное предложение
All pupils like holidays very much.	Высказывание (истинное, вероятно)
Встаньте, дети, встаньте в круг!	Не высказывание – побудительное предложение
$2 + 7 = 3^2$	Высказывание (истинное)
Звезда массой М является звездой главной последовательности.	Не высказывание – содержит переменную
Земля плоская.	Высказывание (ложное)
Два крокодила летят на север, а третий – синий.	Не высказывание – бессмысленное предложение
Кто пойдет в кино?	Не высказывание – вопросительное предложение

Австралия — самый большой материк Земли.

Высказывание (ложное)

Высказывание является **простым**, если никакая его часть не является высказыванием. Оно чаще всего не содержит логических связок. **Составным** называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок.

2. Базовые логические операции

Алгебра логики

Алгебра логики — это математический аппарат, позволяющий оперировать с логическими высказываниями вне зависимости от их содержания, только опираясь на их истинность. Так же, как алгебра оперирует числами, алгебра логики оперирует высказываниями.

Высказывания принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, X, Y...

Логическая операция	Обозначение	Арифметическая операция	Обозначение
Дизъюнкция	+, V, или	Сложение	+
Конъюнкция	*, Λ, &, и	Умножение	*
Инверсия	¬, −, не	Нет аналогии	

Базовые логические операции аналогичны арифметическим операциям в математике, но имеют несколько другой смысл.

С помощью логических операций из простых высказываний можно составить сложное. Пусть есть высказывания:

Высказывание А: «Алиса летит к черной дыре».

Высказывание В: «Боб движется почти со скоростью света».

Тогда можно получить сложные (составные) высказывания:

Высказывание	Запись
Или Алиса летит к черной дыре, или Боб движется почти со скоростью света.	$A \vee B$
Боб движется почти со скоростью света и Алиса летит к черной дыре.	$B \wedge A$
Алиса НЕ летит к черной дыре.	$\neg A$
Алиса летит к черной дыре, а Боб НЕ движется почти со скоростью света.	$A \wedge \neg B$
Это неправда, что Алиса летит к черной дыре, а Боб движется почти со скоростью света.	$\neg(A \wedge B)$

Приоритет выполнения операций следующий:

1. Инверсия.

2. Конъюнкция.

3. Дизъюнкция.

Если нужно изменить порядок выполнения операций, используются скобки.

Познакомимся с базовыми логическими операциями подробнее.

Дизъюнкция

Дизъюнкция — логическое сложение — это логическая операция, ложная только в том случае, если оба исходных высказывания ложны.

Для определения истинности составного высказывания, использующего логическую операцию, применяют **таблицы истинности**.

A	B	$F = A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция

Конъюнкция — логическое умножение — это логическая операция, истинная только в том случае, если оба исходных высказывания истинны.

Таблица истинности для конъюнкции:

A	B	$F = A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Инверсия

Инверсия – логическое отрицание – логическая операция, изменяющая истинность логического высказывания.

Таблица истинности для инверсии:

A	F = ¬A
0	1
1	0

3. Задания для тренировки

1. Выясните, являются ли данные утверждения высказываниями:

Сложение имеет более высокий приоритет перед умножением.

Don't worry, be happy!

$x^2 > 0$

Python – лучший язык программирования!

Гравитационные волны образуются при слиянии черных дыр.

$0 + 1 = 0$

Планета N обитаема.

2. Пусть есть два высказывания:

Высказывание X: «Петя всегда ходит первым»

Высказывание Y: «Ваня ходит вторым»

Запишите словами составные высказывания:

$X \vee Y$

$X \vee \neg Y$

$\neg X \wedge Y$

$\neg (X \vee Y)$

$$\neg (X \wedge \neg Y)$$

3. Выделите простые высказывания в составных и запишите их с использованием символов логических операций.

Графиком линейного уравнения является прямая, а квадратного — парабола.

Наступила осень, идет дождь.

Траекториями движения небесных тел могут быть только кривые конических сечений — окружность, или эллипс, или парабола, или гипербола.

Полгода на полюсах нет солнца, там полярная ночь.

Неверно, что жизнь в Солнечной системе может существовать только на Земле, она может быть и на спутниках Юпитера.