

# Логические операции и их свойства

Таблицы истинности

Использование основ логики для решения задач

Законы алгебры логики

Задания для тренировки

## Аннотация

На этом уроке мы узнаем, как построить таблицу истинности для решения задач, содержащих логические операции, познакомимся с законами алгебры логики и научимся определять истинность составного логического высказывания.

## 1. Таблицы истинности

Определить истинность составного логического выражения можно, если известна истинность входящих в него простых высказываний. Например, если известно, что высказывание  $X$  истинно, а высказывание  $Y$  ложно, то можно определить, истинно ли высказывание.

$$\neg (X \wedge \neg Y) \vee \neg X \vee Y = \neg (1 \wedge \neg 0) \vee \neg 1 \vee 0 = \neg (1 \wedge 1) \vee 0 \vee 0 = 0$$

Высказывание ложно.

### Таблицы истинности

Для определения истинности выражения на всем наборе возможных значений исходных высказываний используются таблицы истинности — таблицы, в столбцах которых записаны переменные и логические операции, а в строках — набор всех возможных значений исходных высказываний.

Для примера, приведенного выше, таблица истинности будет выглядеть так:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$(X \wedge \neg Y)$	$\neg (X \wedge \neg Y)$	$\neg (X \wedge \neg Y) \vee \neg X$	$F = \neg (X \wedge \neg Y) \vee \neg X \vee Y$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1

Видно, что данное выражение ложно только при  $X = 1$ , а  $Y = 0$ .

Чтобы заполнить таблицу истинности неповторяющимися значениями, нужно следовать следующему правилу:

1) Определяем, сколько нужно строк в таблице истинности. Для этого возведем двойку в степень количества переменных: **Количество строк =  $2^{\text{количество переменных}}$** . В нашем примере переменных две, значит, строк 4.

2) Заполняем первый столбец: половину строк заполняем нулями, вторую половину – единицами.

3) В следующем столбце заполняем нулями половину строк, в которых в предыдущем столбце стоят нули, а вторую половину заполняем единицами. Повторяем те же действия для строк, в которых в предыдущем столбце стоят единицы.

4) Повторяем действия из пункта 3, пока не заполним значения для всех переменных.

Составьте и заполните таблицу истинности для выражения

$$A \wedge (\neg B \vee C) \wedge \neg (\neg A \vee B \wedge C)$$

$$\overset{5}{A} \wedge \overset{4}{(\neg B \vee C)} \wedge \neg(\overset{6}{\neg A} \vee \overset{3}{B} \wedge \overset{2}{C})$$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0

**Задания для тренировки.** Составьте и заполните таблицу истинности для выражений:

$$X \vee \neg Y \wedge \neg X$$

$$A \wedge B \vee \neg C$$

$$B \wedge (A \vee B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$$

## 2.Использование основ логики для решения задач

Рассмотрим решение задач, содержащих логические операции. Например, поиск количества записей, удовлетворяющих условию.

Ниже в табличной форме представлен фрагмент базы данных «Основные сведения о небесных телах».

Название планеты	Наклон оси к плоскости орбиты, °	Ускорение свободного падения, м/с <sup>2</sup>	Наличие атмосферы
Меркурий	89	3,7	Следы
Венера	-86,6	8,9	Очень плотн.
Земля	66,5	9,8	Плотная
Марс	65,5	3,7	Разреженная
Юпитер	87	25,8	Очень плотн.
Сатурн	63,5	11,3	Очень плотн.
Уран	-8	9	Очень плотн.
Нептун	61	11,6	Очень плотн.
Плутон	15	0,6	Очень плотн.

Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

**(Наличие атмосферы = «Очень плотн.») ИЛИ (Наклон оси к плоскости орбиты, ° > 80)?**

Для решения определим количество строк, для которых выполняется хотя бы одно условие. Если выполняются оба, то строчку считаем 1 раз. Первое условие выполняется для 6 строк, второе – еще для одной из тех, для которых первое не выполнено. Всего строк 7.

Ответ: 7 записей.

### 3. Законы алгебры логики

Свойства логических операций также называют **законами алгебры логики**.

Они перечислены в таблице.

Название закона	Для дизъюнкции	Для конъюнкции
Переместительный (коммутативный) закон	$A \vee B = B \vee A$	$A \& B = B \& A$
Сочетательный (ассоциативный) закон	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$
Распределительный (дистрибутивный) закон	$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$	$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$
Закон исключенного третьего	$A \vee \neg A = 1$	$A \& \neg A = 0$
Закон повторения	$A \vee A = A$	$A \& A = A$
Законы общей инверсии (де Моргана)	$\neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B$	$\neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$
Законы операций с 0 и 1	$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$	$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$

И еще один закон — закон двойного отрицания:  $\neg\neg A = A$ .

Самостоятельно решите задачи:

1. Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

**(Ускорение свободного падения < на Земле) И (Наличие атмосферы = (Плотная ИЛИ Очень плотн.))?**

2. Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

**(Ускорение свободного падения > 9) И НЕ (abs(Наклон к плоскости орбиты < 45))?**

3. Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

(Наличие атмосферы = «Очень плотн.») И ( $\text{abs}(\text{Наклон оси к плоскости орбиты},^\circ > 60)$ )?

## 4.Задания для тренировки

Давайте рассмотрим несколько задач на определение истинности составного высказывания.

1. Для какого из приведённых слов истинно высказывание:

**НЕ (Первая буква гласная) И (Последняя буква согласная)?**

слива  
яблоко  
банан  
ананас

Одновременно должны выполняться два условия: НЕ (Первая буква гласная) и (Последняя буква согласная). Это значит, что нужно найти слово, в котором первая и последняя буквы — согласные. Это слово «банан».

Ответ: 3.

2. Для какого из приведённых имён истинно высказывание:

**НЕ((Первая буква гласная) ИЛИ НЕ (Последняя согласная))?**

Емеля  
Иван  
Михаил  
Никита

Высказывание А: «Первая буква гласная»

Высказывание В: «Последняя согласная»

Составное высказывание должно быть истинно:  $\neg(A \vee \neg B) \equiv 1$

или обратное утверждение должно быть ложно:  $A \vee \neg B \equiv 0$

Сумма двух слагаемых ложна, когда оба они ложны одновременно:  $A \equiv 0$  или  $\neg B \equiv 0$

То есть нужно найти имя, в котором первая буква не гласная, а

последняя согласная. Это имя Михаил.

Ответ: 3.

Самостоятельно решите задачи:

1. Для какого из приведённых имён истинно высказывание:

**НЕ(Первая буква гласная) И НЕ(Третья буква согласная)?**

Елена  
Полина  
Кристина  
Анна

2. Для какого из приведённых имён ЛОЖНО высказывание:

**НЕ((Третья буква согласная) И (Последняя буква гласная))?**

Анна  
Елена  
Павел  
Егор

3. Для какого из приведённых имён ЛОЖНО высказывание:

**(Первая буква гласная) ИЛИ НЕ(Последняя буква гласная)?**

Елена  
Марина  
Федор  
Иван