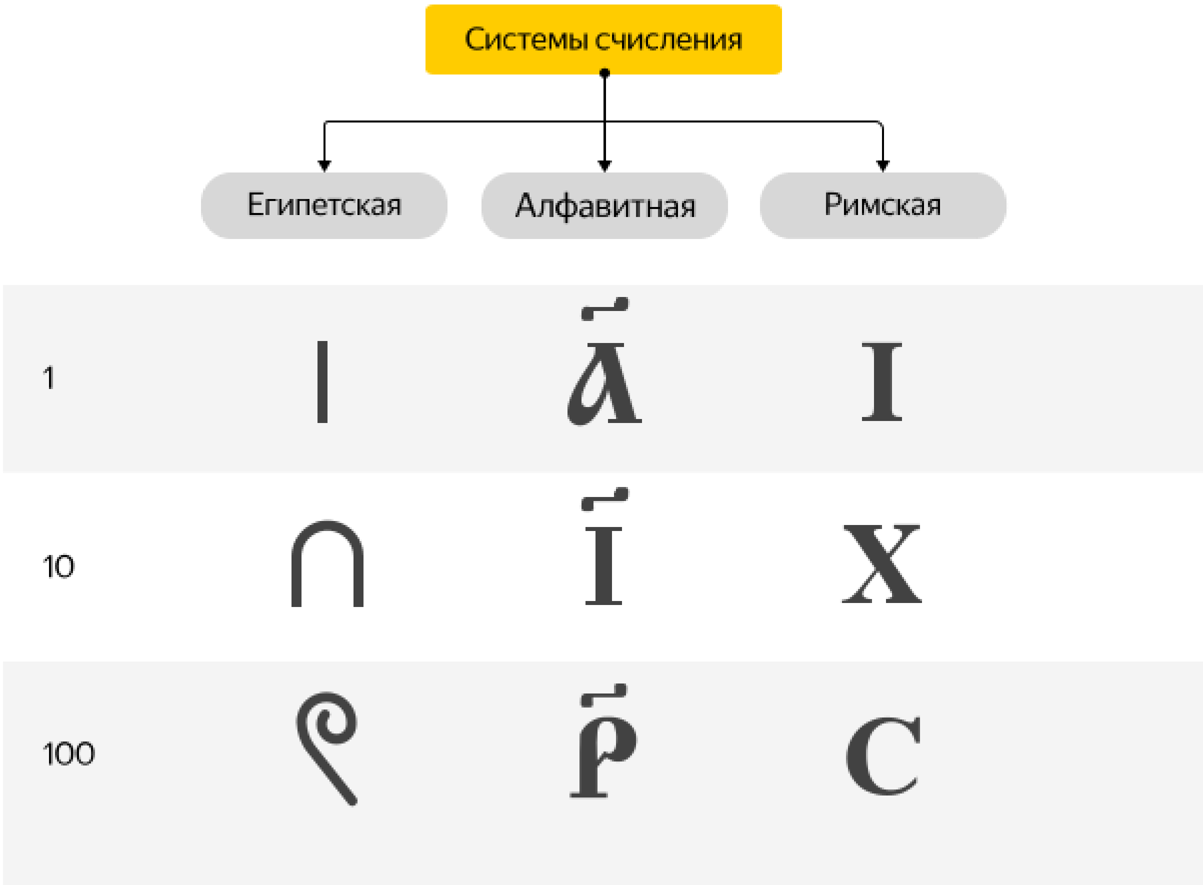
Введение в системы счисления

Аннотация

Пришло время вспомнить различные системы счисления, выяснить общие принципы, по которым построены все позиционные системы счисления, и научится переводить числа между ними.

1.**Позиционные и непозиционные системы счисления**

Для счета и записи чисел люди придумали множество способов. Проще всего считать предметы, отмечая их каким-нибудь простым символом, например, чертой. Но очень скоро таких символов становится очень много. Тогда можно применять различные символы для различного количества одинаковых предметов:



Непозиционные системы счисления

Системы счисления, в которых значение каждого знака не зависит от положения в числе, называются непозиционными.

Среди **позиционных** систем счисления использовались 60-ричная система счисления (ее отголоски можно встретить при делении часа на 60 минут, а минуты на 60 секунд), 12-ричная (до сих пор в некоторых случаях используется в Великобритании) и другие, но наиболее удобной оказалась 10-чная система счисления, наверное, потому, что так просто считать на пальцах!

Но для использования в компьютерах она неудобна. В электрической схеме может быть всего два состояния — включено/выключено, что можно обозначить как 1 и 0. Поэтому для записи информации в компьютере используется двоичная система счисления. (Так было не всегда. Были реализации под троичную систему — ЭВМ «Сетунь». А когда, наконец, появится квантовый компьютер, возможно, будет использована 8-ричная или другая система счисления).

Все позиционные системы счисления устроены одинаково. Есть алфавит, то есть используемые цифры, и разряды, то есть последовательные степени основания системы счисления. Каждая степень может быть умножена на имеющиеся коэффициенты.

2.Устройство различных систем счисления, алфавит, развернутый вид числа

В 10-чной системе счисления:

Алфавит (коэффициенты): 0123456789

Степени 10: 1, 10, 100, 1000 …

$$1991_{10} = \underbrace{1}_{\text{Количество тысяч}} \times 10^3 + \underbrace{9}_{\text{Количество сотен}} \times 10^2 + \underbrace{9}_{\text{Количество десятков}} \times 10^1 + \underbrace{1}_{\text{Количество единиц}} \times 10^0$$

В двоичной системе счисления:

Алфавит (коэффициенты): 01

Степени 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 …

$$42_{10} = \underbrace{1 \times 2^5}_{32} + \underbrace{0 \times 2^4}_{0 \times 16} + \underbrace{1 \times 2^3}_{8} + \underbrace{0 \times 2^2}_{0 \times 4} + \underbrace{1 \times 2^1}_{2} + \underbrace{0 \times 2^0}_{0 \times 1} = 101010_2$$

В 3-чной системе счисления:

Алфавит (коэффициенты): 012

Степени 3: 1, 3, 9, 27, 81, 243 …

$$19_{10} = \underbrace{2}_{\text{Количество девяток}} \times 3^2 + \underbrace{0}_{\text{Количество троек}} \times 3^1 + \underbrace{1}_{\text{Количество единиц}} \times 3^0 = 201_3$$

3.Алгоритмы перевода в разные системы счисления

Мы видим, что перевод из 10-чной системы счисления в любую другую, заключается в последовательном выполнении следующих шагов:

1.Определить для данной системы счисления степени основания, а также используемые цифры, они же представляют собой коэффициенты, на которые можно умножать степени основания системы счисления.
Пример: переведем число 1984 в 5-ричную систему счисления.
Степени основания: 1, 5, 25, 125, 625, …
Коэффициенты: 01234

2.Найти ближайшую, меньшую числа (или равную числу), степень основания системы счисления, возможно, умноженную на один из коэффициентов.
Пример: 3 • 625 = 1875 < 1984

3.Вычесть полученное число из исходного.
Пример: 1984 – 1875 = 109

4.Проделать шаги 1 – 3 пока это возможно.
Пример: 4 • 25 = 100 < 109
109 – 100 = 9
1 • 5 = 5 < 9

9 – 5 = 4
4 • 1 = 4

5.Записать полученные коэффициенты с учетом того, что, если какую-то степень не брали, нужно поставить коэффициент 0.
Пример:
$1984_{10} = 3 \cdot 625 + 0 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 30414_5$

Этот способ удобен для человека, а для компьютера проще составить алгоритм, основанный на нахождении остатков от деления числа на степени основания. Например, такой:

x — число для перевода, q — основание системы счисления

```
while  x > 0:

    print(x % q, end='')

    x //= q
```

Что будет выведено? В чем ошибка? Предложите способ ее исправить.

Перевод в десятичную систему счисления.

Перевод из любой системы счисления в десятичную тоже универсален, нужно просто представить число в развернутом виде (как сумму разрядных слагаемых) и посчитать ответ:

$1001101_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77_{10}$

$1201_3 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 27 + 18 + 1 = 46_{10}$

Способ перевода вычитанием.

Если число, которое нужно перевести, немного меньше целой степени основания, то можно воспользоваться показанным способом, но наоборот, не складывать разряды, а вычитать.

Для двоичной системы это выглядит так.

Пусть надо перевести число 248. Оно на 7 меньше 256 − 1 = 255, которое в двоичной системе представлено 8-ю единицами. А 7_{10} = 111_2. Значит, нам нужно число, похожее на 255, но в котором последние три разряда нули:

$255_{10} = 11111111_2$

$248_{10} = 11111000_2$

4.Решение уравнений в различных системах счисления

Универсальный алгоритм, позволяющий решать уравнения с числами, представленными в различных системах счисления, заключается в записи всех значений в виде суммы разрядных слагаемых. В этом случае уравнение приводится к десятичной системе счисления, а дальше решается известными методами как линейное или степенное. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $33_{x+1} + 30_x = 50_{x+2}$

Запишем каждое число как сумму разрядных слагаемых:

$33_{x+1} = 3(x + 1) + 3 = 3x + 6$

$30_x = 3x + 0 = 3x$

$50_{x+2} = 5(x + 2) + 0 = 5x + 10$

Теперь подставим полученные значения в исходное уравнение:

$3x + 6 + 3x = 5x + 10$

Решаем:

$6x + 6 = 5x + 10$

$x = 4$

Проверка:

$33_5 + 30_4 = 50_6$

$18 + 12 = 30$

Верно.

Пример 2. Решить уравнение $212_{x-2} + 34_x = 110_{x+1}$

Запишем каждое число как сумму разрядных слагаемых:

$212_{x-2} = 2(x - 2)^2 + 1(x - 2) + 2 = 2x^2 - 7x + 8$

$34_x = 3x + 4$

$110_{x+1} = 1(x + 1)^2 + 1(x + 1) + 0 = x^2 + 2x + 1 + x + 1$

Теперь подставим полученные значения в исходное уравнение:

$2x^2 - 8x + 8 + x - 2 + 3x + 4 = x^2 + 3x + 2$

Решаем:

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x = 5; 2$

Второй корень не подходит по смыслу задачи, остается $x = 5$.

Проверка:

$212_3 + 34_5 = 110_6$

$23 + 19 = 42$

Верно.

5.Задания для тренировки

1. Переведите следующие числа в двоичную систему счисления методом, предложенным в уроке: 9, 19, 29, 48, 57, 99, 121, 224, 250, 500, 513.

2. Переведите число 247 в системы счисления с основаниями 3, 4, 5, 6, 7, 9.

3. Переведите числа:

16 в двоичную;
27 в троичную;
64 в 4-ричную;
49 в 7-ричную.

Что вы заметили?

4. Решите уравнения:

$40_{x+2} = 30_x + 111_{x-2}$

$223_{x+1} - 120_x = 103_{x+2}$

Ответьте на вопросы:

Как по виду числа двоичной системе отличить четное от нечетного?
Как выглядит число, если оно делится на основание системы счисления без остатка?
А если оно делится на квадрат основания? А на куб?
Запишите пример для двоичной системы.