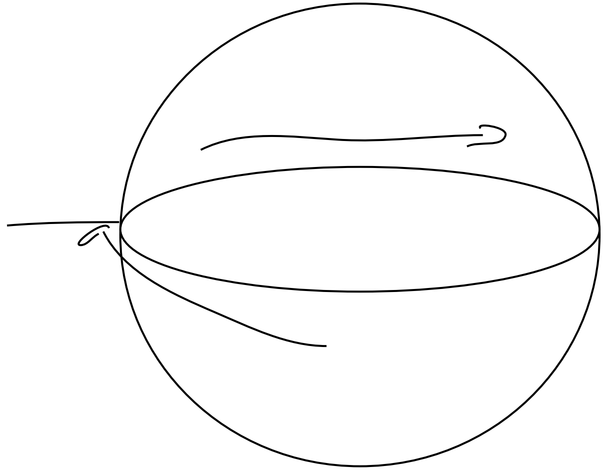
Vв0=Vш



$$F = \frac{1}{2}\rho V^2 A C_l$$

§ 8. Вращение шара в вязкой жидкости

Приближённые дифференциальные уравнения Стокса установившегося движения несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах согласно соотношениям (7.1) главы IV будут представляться в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), \\ \frac{\partial p}{r\,\partial \varphi} &= \mu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu\,\Delta v_z, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} &+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Будем предполагать, что траектории всех частиц суть окружности с центрами на оси z, т. е.

$$v_r \equiv 0, \quad v_z \equiv 0. \tag{8.2}$$

При этом предположении из уравнения несжимаемости (8.1) будем иметь

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \tag{8.3}$$

Если считать давление p не зависящим от φ, то для единственной компоненты скорости v_φ получим из (8.1) следующее дифференциальное уравнение:

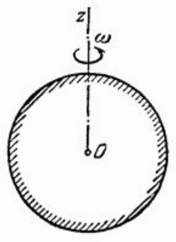


Рис. 49.

$$\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0. \tag{8.4}$$

Учитывая выражение (6.12) главы II оператора Лапласа в сферических координатах и (8.3), дифференциальное уравнение (8.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{R^2 \sin^2\theta} = 0. \tag{8.5}$$

Рассмотрим теперь задачу о вращении шара в безграничной вязкой жидкости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z (рис. 49). Напишем условие прилипания частиц жидкости к поверхности шара:

$$\text{при } R = a \quad v_\varphi = \omega r = \omega a \sin\theta. \tag{8.6}$$

Будем полагать, что на бесконечном удалении от шара скорость жидкости обращается в нуль:

$$\text{при } R = \infty \quad v_\varphi = 0. \tag{8.7}$$

Вид граничного условия (8.6) указывает на возможность искать решение дифференциального уравнения (8.5) в виде

$$v_\varphi = \sin\theta\, f(R). \tag{8.8}$$

Подставляя значение v_φ из (8.8) в (8.5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{df}{dR} - \frac{2}{R^2} f = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$f = C_1 R + \frac{C_2}{R^2}. \tag{8.9}$$

Для удовлетворения граничного условия (8.7) на бесконечности необходимо положить:

$$C_1 = 0.$$

Используя граничное условие прилипания (8.6), получим:

$$C_2 = \omega a^3.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи о вращении шара в неограниченной вязкой жидкости будет представляться в виде

$$v_\varphi = \frac{\omega a^3 \sin\theta}{R^2}. \tag{8.10}$$

На основании (6.9) главы II и предположений (8.2) и (8.3) для касательных компонент напряжения будем иметь:

$$p_{R\theta} = 0, \quad p_{\varphi R} = \mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R}\right), \quad p_{\varphi\theta} = \frac{\mu}{R}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - v_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right).$$

Подставляя значение v_φ из (8.10), получим:

$$p_{R\theta} = 0, \quad (p_{\varphi R})_a = -3\mu\omega\sin\theta, \quad p_{\varphi\theta} = 0. \tag{8.11}$$

Для вычисления результирующего момента сил сопротивления вращению шара в вязкой жидкости необходимо выражение (8.11) для $(p_{\varphi R})_a$ умножить на элемент поверхности $a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и на плечо относительно оси $a \sin\theta$ и проинтегрировать по всей поверхности шара. В результате мы получим:

$$L_z = \iint (p_{\varphi R})_a a^3 \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi = -6\pi\mu\omega a^3 \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = -8\pi\mu\omega a^3. \tag{8.12}$$

Таким образом, при решении задачи о вращении шара в неограниченной вязкой жидкости на основе приближённых уравнений, без учёта квадратичных членов инерции момент сил сопротивления вязкой жидкости пропорционален первой степени угловой скорости вращения.

§ 9. Движение вязкой жидкости в коническом диффузоре

Рассмотрим движение вязкой жидкости в коническом диффузоре в предположениях: 1) жидкость считается несжимаемой, 2) движение предполагается установившимся и осесимметричным, 3) действием массовых сил и квадратичными членами инерции можно пренебречь и 4) движение частиц является строго радиальным, т. е.

$$v_\theta = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R} \equiv 0. \tag{9.1}$$

При этих предположениях функция тока будет удовлетворять дифференциальному уравнению Стокса

$$DD\psi = 0 \tag{9.2}$$

и, кроме того, не будет зависеть от переменного R. Учитывая выражение (7.2) оператора Стокса и независимость функции тока от R, получим:

$$D\psi = \frac{\sin\theta}{R^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\psi}{d\theta}\right). \tag{9.3}$$

Введём новое независимое переменное, полагая

$$\cos\theta = \tau. \tag{9.4}$$

Тогда из (9.2) и (9.3) получим:

$$D\psi = \frac{1-\tau^2}{R^2}\frac{d^2\psi}{d\tau^2},$$

$$DD\psi = \frac{1}{R^4}\left\{6(1-\tau^2)\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + (1-\tau^2)\frac{d^2}{d\tau^2}\left[(1-\tau^2)\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\right]\right\} = 0.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (9.2) будет представляться в виде

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left[6\psi + (1-\tau^2)\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\right] = 0,$$

или

$$(1-\tau^2)\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + 6\psi = C_1 + C_2\tau. \qquad 9.5)$$

Легко видеть, что частное решение дифференциального уравнения (9.5) с правой частью представляется в виде

$$\psi_3 = \frac{1}{6}(C_1 + C_2\tau) = A + B\tau.$$