

Условие

а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные - картинкой вверх. Вторым участником фокуса отгадывается закрытая карта.

Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

б) Вторым фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?

Подсказка

Из пяти карт хотя бы две имеют одинаковую масть

Решение

а) Между всеми картами колоды можно каким-то образом (каким именно — неважно) установить старшинство. Из пяти карт (по принципу Дирихле) хотя бы две имеют одинаковую масть. Первый фокусник выбирает две такие карты, одну из них располагает рубашкой вверх, а другую ставит первой среди открытых в пятёрке, так что второй фокусник узнаёт масть закрытой карты. Всего карт одной масти 13, одна из них открыта, так что остаётся выбрать из 12 возможностей. Следующие три карты, которые открыты, можно упорядочить шестью способами (в порядке роста старшинства, в порядке убывания и т. д.). Закрытая карта может располагаться между остальными пятью способами. Всего вариантов оказывается $6 \times 5 = 30$ — этого достаточно, чтобы закодировать 12 карт.

б) Как и в задаче а), первый фокусник выбирает масть, которая представлена хотя бы двумя картами, выбирает эти две карты. Дальше он действует иначе. 13 карт выбранной масти можно расположить по кругу в установленном порядке (например, в порядке роста старшинства). Фиксируем направление обхода. От каждой карты проведём стрелки к шести картам, которые в этом круге идут следом за ней в этом направлении. Тогда любые две карты окажутся соединёнными, и притом только одной стрелкой. Теперь фокусник из двух выбранных карт берёт ту, в которую идёт стрелка, и её оставляет у себя, а другую выкладывает. Таким образом, второму фокуснику приходится выбирать уже не из 12, а только из шести карт, что, как мы видели, возможно.

Ответ

б) да.

