

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Числа, являющиеся полными квадратами целых чисел и только они имеют нечетное количество делителей.

Доказательство:

Т.к. тривиальные делители любого числа (1 и само это число) не меняют четности делителей, то мы их не учитываем.

I. Пусть b не является полным квадратом ни одного целого числа.

Пусть a делит b . Тогда существует c (единственное) такое что $b=ac$.

Но тогда c делит b .

$a < c$, т.к. иначе бы $b=a^2$, т.е. b - полный квадрат числа a , что противоречит условию.

Следовательно, для каждого делителя числа b найдется единственный парный ему делитель. Т.е. число делителей четно.

II. Пусть теперь b является полным квадратом некоторого числа a .

Тогда $b=a*a$. Т.е. a делит b .

Любой другой делитель числа b будет иметь парный делитель. Т.к. иначе $b=c*c$ для некоторого c , но тогда $c=a$.

Таким образом b имеет только один делитель у которого нет пары. Т.е. число делителей у b - нечетно.

Доказано.

