Существует ли миллион целых чисел подряд, среди которых нет ни одного простого числа?

да, существует такие числа.
и более того, существует любое наперед заданное количество подряд идущих чисел, среди которых нет простых

A=1*2*3*4*5*6*7*...*1000000=1000000!
1000000!+2=1*2*3*4*5*6*7*...*1000000+2=2(1*3*4*5*6*7*...*1000000+1)
1000000!+3=1*2*3*4*5*6*7*...*1000000+3=3(1*2*4*5*6*7*...*1000000+1)
...
1000000!+1000000=1*2*3*4*5*6*7*...*1000000+3=3(1*2*4*5*6*7*...*1000000+1)

$$(k+2)(1-[wz+h+j-q]^2-[(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2-[2n+p+q+z-e]^2-$$
$$[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2]^2-[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2]^2-[(a^2-1)y^2+1-x^2]^2-$$
$$[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2]^2-[((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2]^2-[n+l+v-y]^2-$$
$$[(a^2-1)l^2+1-m^2]^2-[ai+k+1-l-i]^2-[p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m]^2-$$
$$[q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2-[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm]^2)$$

многочлен 25-ой степени от 26 переменных

Постулат Бертрана

между n и 2n всегда найдется хотя бы одно простое число

простых чисел бесконечно много

программирование с конечными объектами, математика умеет побеждать бесконечность

от противного

пусть простых чисел не бесконечно много, т.е. их конечно.
p1,p2,...,pk

Например, для списка из трёх простых чисел 2, 3, 5 получаем

$$N = 2\cdot 3\cdot 5+1 = 31.$$

В данном случае N само оказалось простым числом, не входящим в список. Но так бывает не всегда: например,

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1 = 59\cdot 509,$$

рассмотрим новое число A=p1*p2*...pk+1
что можно сказать о простоте числа A?
поделим на p2 A/p2=(p1*p2*...pk+1)/p2 =p1*p2*...pk/p2 + 1/p2=p1*...pk + 1/p2
A не делится ни на одну p-шку=> A либо простое, либо A делится на какое-то простое число, большее всех p-шек => предположение о конечности простых чисел неверно

PI(n) - количество простых чисел, меньших n
Pi(10)=4

1.Евклид 2500 лет назад
Pi(n) -> oo с ростом n

2.Эйлер 1730-1790
Pi(n)/n -> 0 с ростом n

oo/oo=1/oo = 0

Яглом Неэлементарные задачи в элементарном изложении

3.Чебышев 1860-1890
Распределительный закон

$$\frac{\pi(n)}{n/\ln n} \to 1, \text{ когда } n \to \infty.$$

ln n= степень в которую надо возвести число e=2.71, чтобы получить число n

ln9 = 2

ln1000 000 000=20,7232658369
n/lnn=50 000 000