В одной школе есть 1000 шкафов для одежды с номерами 1, 2, ... , 1000, которые на ночь запираются. В этой школе живёт 1000 привидений. Ровно в полночь 1-е привидение открывает все шкафы; затем 2-е закрывает шкафы с номерами, делящимися на 2; затем 3-е меняет состояние (открывает, если шкаф закрыт и наоборот) тех шкафов, номер которых делится на 3 и т. д. 1000-е меняет состояние шкафа с номером 1000, после чего привидения исчезают. Сколько шкафов останутся открытыми?

24. Посмотрим, шкафы с какими номерами останутся открытыми: 1, 4, 9, 16, ... Возникает предположение, что шкаф окажется открытым, если его номер — квадрат натурального числа. Покажем, что это действительно так. Заметим, что шкаф с номером n меняет состояние столько раз, сколько делителей у числа n. При этом шкаф окажется в итоге открытым, если n имеет нечётное число делителей. Однако делители образуют пары: если d — делитель числа n, то n/d — также делитель. Поэтому количество делителей нечётно лишь тогда, когда для какого-то d выполнено равенство $d=n/d$. Отсюда $n=d^2$, т. е. число n является полным квадратом. Квадраты, не превосходящие 1000, – это $1^2, 2^2, \ldots, 31^2$ (всего 31 число). Значит, всего 31 шкаф останется открытым.