



За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и т. д. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе 3 литра молока. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?



Публикую свое решение. Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_7$  - количество молока в кружках в начале. Сразу очевидно что  $x_7=0$ . Через  $y_1, y_2, \dots, y_7$  - количество молока в соответствующих кружках перед тем моментом когда молоко из кружки разливают и она остается пустой. Поскольку конечное распределение молока совпадает с начальным, то можно записать равенства

$$1) x+y+z+a+b+c=3$$

$$2) d=0$$

$$(z+x/6+(y+x/6)/6)/6=x$$

$$(z+x/6+(y+x/6)/6)/6+\dots=x$$

G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
x=100	y=200	z=300	a=400	b=500	c=600	0
0	Y+X\6	Z+X\6	A+X\6	B+X\6	c+x\6	x\6
(Y+X\6)/6	0	(Y+X\6)/6+(Z+X\6)	(Y+X\6)/6+(A+X\6)	(Y+X\6)/6+(B+X\6)	(Y+X\6)/6+(c+x\6)	(Y+X\6)/6+x\6
		0				
			0			
				0		
					0	

$$x_6=y_7/6$$

$$x_5=y_7/6+y_6/6$$

$$x_4=y_7/6+y_6/6+y_5/6$$

$$x_3=y_7/6+y_6/6+y_5/6+y_4/6$$

$$x_2=y_7/6+y_6/6+y_5/6+y_4/6+y_3/6$$

$$x_1=y_7/6+y_6/6+y_5/6+y_4/6+y_3/6+y_2/6$$

$$x_1-x_2=y_2/6 \quad y_2=6x_1-6x_2$$

$$x_2-x_3=y_3/6$$

$$x_3-x_4=y_4/6$$

$$x_4-x_5=y_5/6$$

$$x_5-x_6=y_6/6$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3$$

$$y_2=x_2+x_1/6=6x_1-6x_2$$

$$7x_2=5x_1/6$$

17. Ответ: 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7, 0 литров.

Легко показать, что указанные числа служат ответом. Дело в том, что после разливания молока первым гномом (по 1/7 каждому из остальных) получается точно такое же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма  $\frac{1+2+\dots+6}{7}$  как раз равна 3. Осталось

доказать, что нет других ответов. Пусть  $x$  — наибольшее количество молока, оказавшееся за всё время переливаний у какого-либо гнома  $G$ . Тогда после очередного цикла из семи «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что  $G$  можно считать первым в цикле) у  $G$  накопится не более чем  $6 \cdot x/6 = x$  литров молока; причём равенство возможно, лишь если каждый из шести других гномов наливает в кружку  $G$  ровно  $x/6$  литров молока. Таким образом, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество  $x$  молока и после получения  $k$  порций у него в кружке налито  $kx/6$  литров ( $k=1, 2, \dots, 6$ ). Зная из условия, что  $\frac{x+2x+\dots+6x}{6} = \frac{7}{2}x = 3$ , находим единственный ответ.

...  
 $x_1=y_7/6+y_6/6+\dots+y_2/6$   
 Теперь вычитаем из 6-го уравнения 5, из 5-го 4-е и. д.т  
 получаем  
 $x_1-x_2=y_2/6$   
 $x_2-x_3=y_3/6$   
 $x_3-x_4=y_4/6$   
 ...  
 $x_5-x_6=y_6/6$   
 Затем начиная с первого уравнения начинаем расписывать  $y_i, i=2 \dots 6$   
 $y_2=x_2+x_1/6$  находим связь  $x_1=6/5x_2$ , откуда  $y_2=x_1$   
 Из второго уравнения, расписывая  $y_3=x_1/6+y_2/6+x_3$  находим  $x_1=3/2x_3$  и  $y_3=x_1$   
 И так далее, замечу все  $y_i=x_1$   
 Далее выразив все  $x_i, i=2 \dots 6$  через  $x_1$ , записываем сумму  $x_i, i=1 \dots 6$ , которая равна 3 л, находим  $x_1$ , а через него все остальные  $x$ . Ответ получается такой  $x_1=6/7$  л,  $x_2=5/7$  л, ...,  $x_6=1/7$  л,  $x_7=0$ .  
 Чувствуется что должно быть более красивое решение но я его пока не нашел.