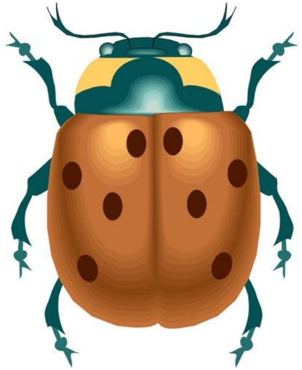
Вы держите один конец очень эластичного резинового шнура длиной 1 м. От второго его конца, который закреплён, к вам со скоростью 1 см/с ползёт жук. Каждый раз, когда он проползает 1 см, вы удлиняете резинку, отступая на 1 метр. Доползёт ли жук до вашей руки?



21. Ответ: да (теоретически).

Правильный ответ в этой задаче кажется неправдоподобным, а вопрос нелепым. Ведь мы забываем, что когда резинка мгновенно растягивается, жучок смещается относительно земли. Посмотрим, какую долю $d(n)$ резинки проползёт жук через n секунд:

$$d(1)=\frac{1}{100}, \quad d(2)=\frac{1}{100}+\frac{1}{200}, \quad \ldots, \quad d(n)=\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\ldots+\frac{1}{100n}.$$

Найдется ли такое n, что сумма $d(n)$ превзойдёт 1? (Это и будет означать, что жук прополз всю резинку.) Достаточно сравнить

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad 100.$$

Но сумма в левой части может быть сколь угодно большой. Для $n=2^k$:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)>$$

$$>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k \text{ раз}}=\frac{k}{2}+1.$$

Выбрав $k=200$ и $n=2^k=2^{200}$, в частности, получим:

$$100d(n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>100,$$

т. е. $d(2^{200})>1$ и жук доползёт до руки!