

Из клетчатой доски размером $2n \times 2n$ клеток ($n >= 1$) вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть можно замостить уголками из трёх клеток.

22. База индукции $n=1$: если из доски 2×2 удалить клетку, то как раз уголок и останется, и утверждение при $n=1$ очевидно.

Индукционный переход $n=k \rightarrow n=k+1$: Рассмотрим доску размером $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Тогда выброшенная клетка принадлежит одной из четырёх частей размера $2^k \times 2^k$, образованных средними линиями большой доски. Пусть для определённости это правая верхняя часть. Вырежем дополнительно уголок так, как показано на рис. 27. Тогда окажется, что в каждой из четырёх частей большой доски вырезано по клетке, и можно применить предположение индукции. Замостив каждую из этих частей и вернув на место вырезанный уголок, мы получим искомое замощение большой доски. Теперь, основываясь на принципе математической индукции, можно утверждать, что искомое замощение существует для любой доски вида $2^n \times 2^n$, произвольная клетка которой вырезана.

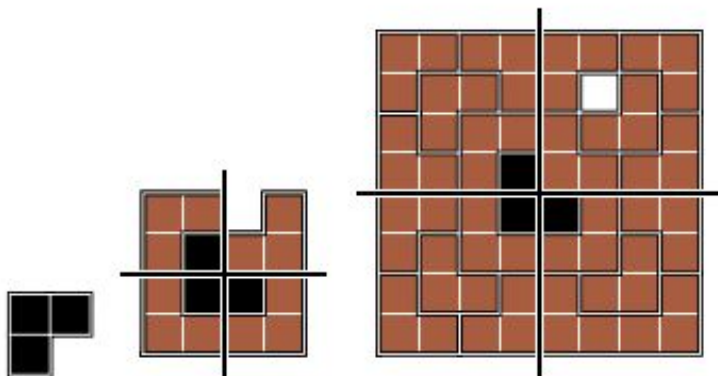


Рис. 27