Док-ть:Множество всех real numbers несчетно.

Док-во: от противного - пусть счетно, тогда занумеруем все real numbers нутуральными числами a1,a2,a3…

Покроем каждую точку ai интервалом Gi длины 10^-i

1)Доказать, что при любом n объединение G1U...UGn не покрывает весь отрезок [0;1]

2)Выберем какую-нибудь точку Bn, не покрытую объединением G1U...UGn

Доказать, что найдется точка C, предельная для всех точек Bn

3)Доказать, что точка C не покрыта никаким интервалом Gk

4)Как теперь доказать несчетность real numbers

1)1/10+1/100+...=0,111…<0,2<1
2)По теореме Больцано и Вейерштрасс для бесконечного множества на отрезке найдется хотя бы одна предельная точка C.
3) Пусть точка C покрыта интервалом Gk, тогда в любой окрестности w точки C найдётся хотя бы одна точка y из множества B (это значит что в любой окрестности найдется и бесконечно много точек множества B), значит так как Gk это тоже окрестность точки C, значит в Gk тоже найдется точка Bm из множества B. При этом m<k, так как по определению точек Bn только точка с номером меньшим k может входить в Gk. Это вызывает противоречие, так как в Gk должно быть бесконечно много точек B. Значит точка C не покрыта никаким Gk.

4) Все точки должны быть покрыты Gi (в эти точки также входит C), но в пункте 3 доказано, что C не может быть покрыта никаким G. Это вызывает противоречие. Соответственно множество всех real numbers несчетно.