

Покажите, что последовательность  $a_n = (1 + 1/n)^n$  возрастающая

$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1^n + C(n,1) \cdot 1/n + C(n,2) \cdot 1/n^2 + \dots + C(n,n) \cdot 1/n^n$$

$$a_{n+1} = (1 + 1/(n+1))^{n+1} = 1^{n+1} + C(n+1,1) \cdot 1/(n+1) + C(n+1,2) \cdot 1/(n+1)^2 + \dots + C(n+1,n+1) \cdot 1/(n+1)^{n+1}$$

$$C(n,1) = n! / 1!(n-1)! = n$$

$$C(n+1,1) = (n+1)! / 1!n! = n+1$$

$$C(n,k)/n^k = n! / [k! (n-k)! n^k] = 1/[k! n^k] \cdot n! / (n-k)! = 1/[k! n^k] \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = 1/[k! n^k] \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = 1/[k!] \cdot n / n \cdot (n-1) / n \cdot \dots \cdot (n-k+1) / n = \underline{1/[k!] \cdot 1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(k-1)/n)}$$

$$C(n+1,k)/(n+1)^k = (n+1)! / [k! (n+1-k)! (n+1)^k] = (n+1) \cdot (n+1-1) \cdot (n+1-2) \cdot \dots \cdot (n+1-k+1) / [k! (n+1)^k] = 1/[k!] \cdot (n+1) / (n+1) \cdot (n+1-1) / (n+1) \cdot (n+1-2) / (n+1) \cdot \dots \cdot (n+1-k+1) / (n+1) = \underline{1/[k!] \cdot 1 \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot \dots \cdot (1-(k-1)/(n+1))}$$

$$\underline{1/[k!] \cdot 1 \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot \dots \cdot (1-(k-1)/(n+1))} > \underline{1/[k!] \cdot 1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(k-1)/n)}$$

$$1 \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot \dots \cdot (1-(k-1)/(n+1)) > 1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(k-1)/n)$$

$$n! / (n-3)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)! / (n-3)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$(n+1)! / [k! (n+1-k)! (n+1)^k] / n! / [k! (n-k)! n^k] =$$

$$= (n+1)! / [k! (n-k)! n^k] / n! / [k! (n+1-k)! (n+1)^k] =$$

$$= (n+1) / [n^k] / [(n+1-k) (n+1)^k] =$$

$$= [n^k] / [(n+1-k) (n+1)^{k-1}]$$