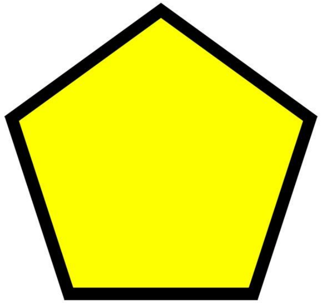
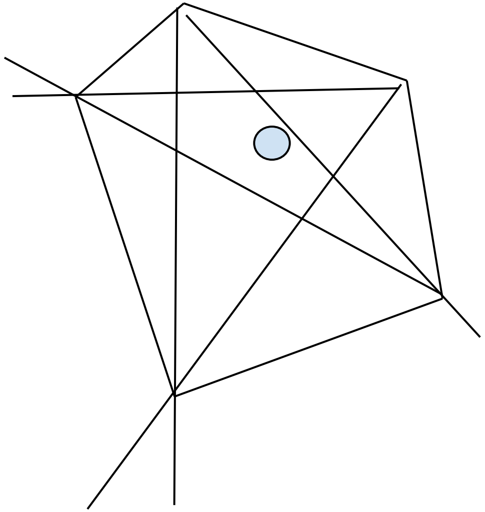
Внутри выпуклого пятиугольника ABCDE взята точка M, не лежащая на диагоналях пятиугольника. У каждой вершины пятиугольника имеется ровно одна противоположная сторона (чтобы дойти от этой вершины до этой стороны по пятиугольнику требуется пройти через две вершины пятиугольника). Назовем вершину пятиугольника "выделенной", если прямая, проведенная из этой вершины через точку M, пересекает сторону, противоположную этой вершине. Докажите, что число выделенных вершин всегда нечетно.





Условие

Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Сторонами, противоположными вершинам A, B, C, D, E, мы называем соответственно отрезки CD, DE, EA, AB, BC. Докажите, что если произвольную точку M, лежащую внутри пятиугольника, соединить прямыми со всеми его вершинами, то из этих прямых либо ровно одна, либо ровно три, либо ровно пять пересекают стороны пятиугольника, противоположные вершинам, через которые они проходят.

Также доступны документы в формате TeX

Решение

Проведём диагонали данного пятиугольника. Они разбивают его на 11 областей: один пятиугольник, 5 внутренних треугольников (сторонами которых служат диагонали) и 5 внешних треугольников (одной из сторон каждого из которых служит сторона пятиугольника). Если точка M принадлежит внешнему треугольнику, то число требуемых прямых равно 1, если M принадлежит внутреннему треугольнику, то число прямых равно 3, а если пятиугольнику, то число прямых равно 5.