

Для празднования дня рождения Петя покупал пирожные разных сортов. Если пирожное стоило N рублей, то Петя покупал такое количество этих пирожных, которое отличается от N не более, чем на 1. За все пирожные Петя заплатил 2009 рублей. Докажите, что среди купленных Петей пирожных есть такие, что они стоят M рублей, и Петя купил их ровно M штук (Каждое пирожное стоит целое число рублей).



Решение

От противного: пусть это не так, тогда $N*(N-1)+K*(K+1)+...+P*(P+1)=2009$. И нет слагаемых вида $M*M$. Тогда любое число вида $N*(N-1)$ и $K*(K+1)$ будет необходимо четным (т.к. это произведение 2-х рядом стоящих чисел, а значит вся сумма будет четной, , получаем противоречие, т.к. 2009 нечетное.