ОПРЕДЕЛЕНИЕ: множества равномощные натуральным числам называются СЧЕТНЫЕ, иначе НЕСЧЕТНЫЕ

Доказать

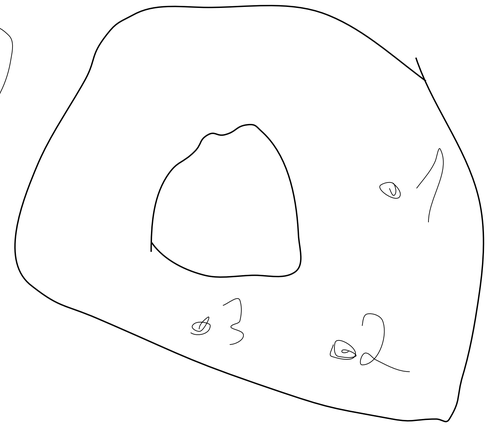
а) Счетные множества самые маленькие из бесконечных (т.е. любое бесконечное множество имеет счетное подмножество)

б) Мощность бесконечного множества не изменяется от прибавления к нему счетного множества

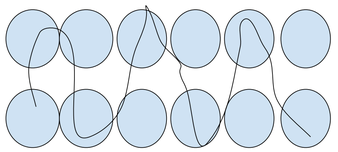
в) Мощность несчетного множества не меняется от удаления из него счетного множества

алеф ноль=
=мощность
счетного
множества

а)



В любом бесконечном множестве есть хотя бы 1 элемент, номируем его 1. Выбрасываем этот элемент из нашего множества, останется по-прежнему бесконечно много элементов, среди них снова найдется хотя бы 1 элемент, который мы пронумируем 2, потом выкинем сразу 2 элемента, оно по-прежнему останется бесконечным и так далее беря по 1 элементу мы построем счетное подмножество



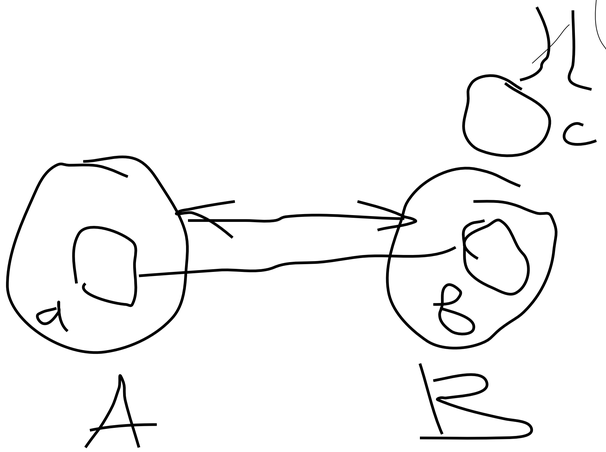
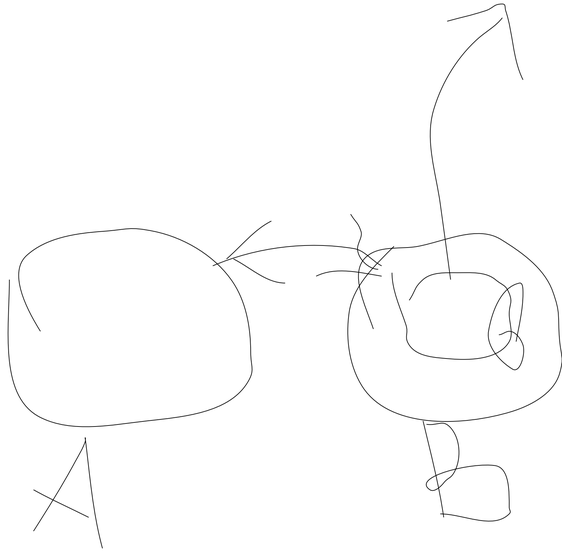
Пусть будут 2 множества A и B равной мощности, во множестве B нашлось счетное подмножество b из теоремы из пункта а. Пусть мы выкинули из B множество b и множество B потеряло свою несчетность, то есть B стало счетным или конечным, тогда B стало равномощно множеству натуральных чисел и неравномощно множеству A. Вернем b обратно в B, тогда B останется счетным по теореме из пункта б, а это протеворечит здравому смыслу. Это значит, что когда мы убирали b из B, то B осталь несчетным.По таким же соображениям мощность тоже не меняется.

несчетные

б) $\mathbb{N} < C < P(C) < C_2$

$\mathbb{N} = \mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{R}$ $\quad$ $P(C) = \aleph_1$

Есть 2 бесконечных множества A и B одинаковой мощности, тоесть между ними есть взаимооднозначное соответствие. По теореме из пункта а в каждом из них есть счетное подмножество a и b, которые между собой взаимооднозначны. Пришло счетное множество C, мы должны соединить его с B единой нумерацией. После этого a будет ассоциироваться не только с b, а с b и с вместе



в)