Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно (взаимно однозначно) некоторому своему подмножеству.

если бесконечно ⟹ то множество эквивалентно подмножеству — 1

счетное множество самое маленькое из бесконечных

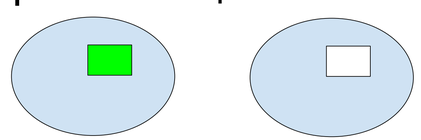
1)в любом бесконечном множестве содержится счетное подмножество

2)добавление счетного множества к бесконенчному множеству не меняет мощность множества

3)Мощность несчетного множества не меняется от удаления из него счетного множества

У нас есть бесконечное множество, по теореме в нем есть счетное подмножество. Рассмотрим 2 случая:

1) Исходное беск. множество счетное.
Оно эквивалентно этому самому подмножеству.
2) Исходное беск. множество несчетное
По 3 теорме удаляем найденное счетное множество, и при этом его (исходного множества) мощность не меняется. Получившееся множество является подмножеством исходного, которое ему равномощно.



то бесконечно ⟸ если множество эквивалентно подмножеству — 2

У нас есть множество и его подмножество, которые взамиоднозначны. Пусть исходное множество не бесконечно, но при этом оно эквивалентно своему подмножеству. Конечное множество не может быть эквивалентно своему подмножеству. Противоречие. Значит исходное множество бесконечно.