

$$P(f: N \rightarrow N) = n^n$$

$$P(f: B \rightarrow A) = A^B$$

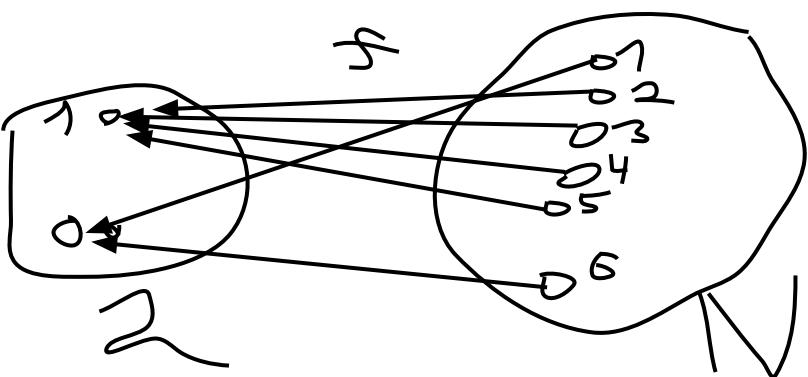
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мощность множества всех функций из произвольного множества B в произвольное множество A будем обозначать A^B

1)Показать, что $2^N > N$, где N - счетное множество (т.е. предложить множество ф-ий принимающих ровно 2 значения на элементах множества N, которое мощнее N)

2)Показать, что $2^X > X$, где X - произвольное множество. Указание: рассмотреть множество всех функций, принимающих значения 0 и 1 на элементах множества X

3) $N < 2^N = C < 2^C = F < \dots$ Где N - счетная мощность, C-мощность континуума, F - мощность всех функций, заданных на континууме принимающих значения 0 и 1 и т.д. Проверить, существуют ли в этой цепочке между некоторыми мощностями промежуточные (например, между C и F)

задача 1 способ 1 - напрямую

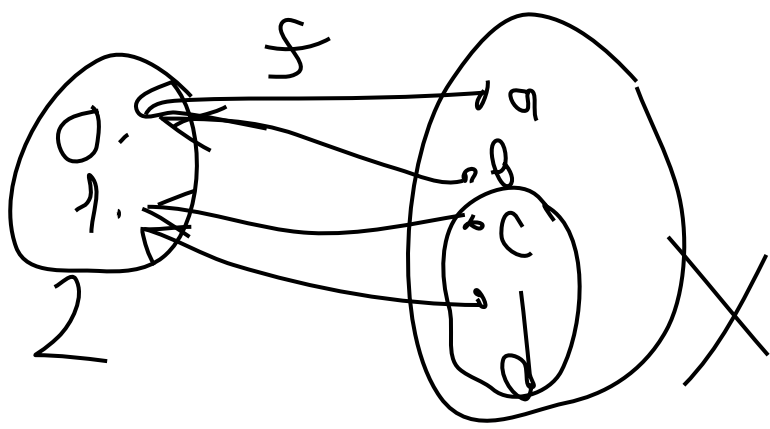


$$2^N > N$$

запись одной из нужных нам функций
01111011011101011011001110
1->0
2->1
3->1
4->1
5->1
6->0

континуум последовательностей
мощнее счётного множества

задача 1 способ 2-
через подмножества



если элемент входит в подмножество, то
ф-ия на нём равна 1, а если не входит,
то 0

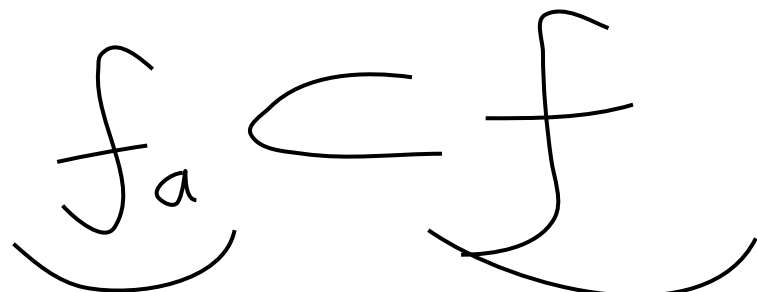
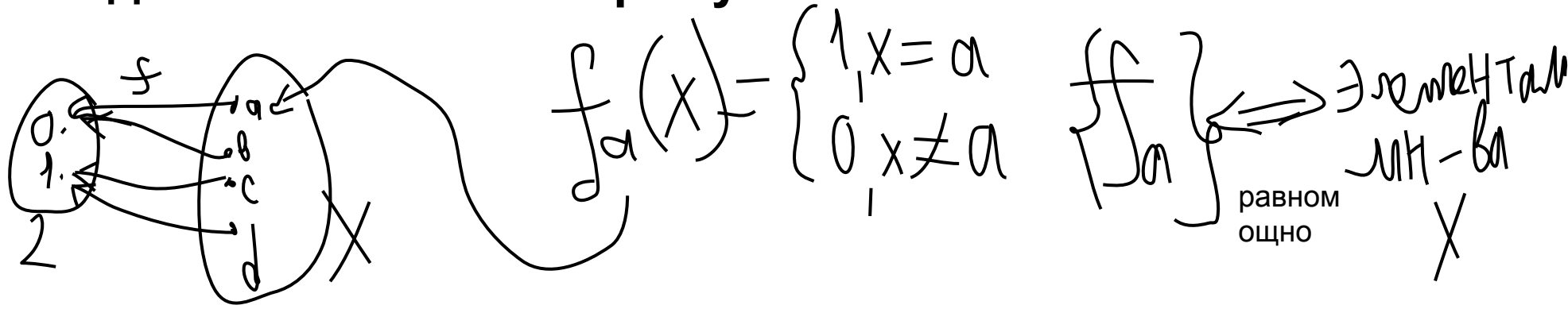
построить взаимнооднозначное соответствие
между всеми подмножествами X и
функциями из множества X в 2-х
элементное множество {0;1}

$$f(a) = 0$$
$$f(b) = 0$$
$$f(c) = 1$$
$$f(d) = 1$$

$$f \leftrightarrow \{c, d\}$$

c и d входят в подмножество и на них
ф-ия равна 1, а на a и b равна 0

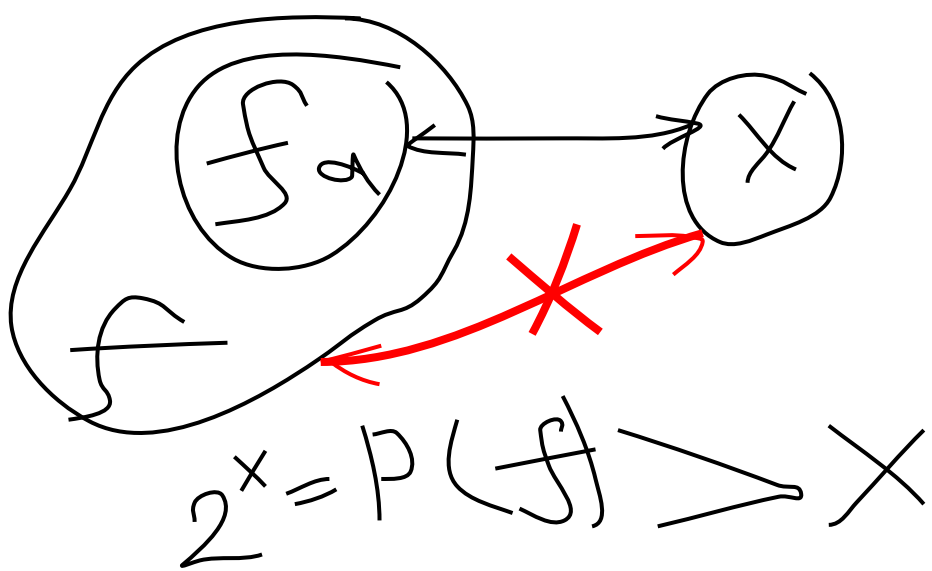
задача 2 способ 1-напрямую



только одну
единицу и все нули

могут принимать в
качестве значений
много единиц и
много нулей

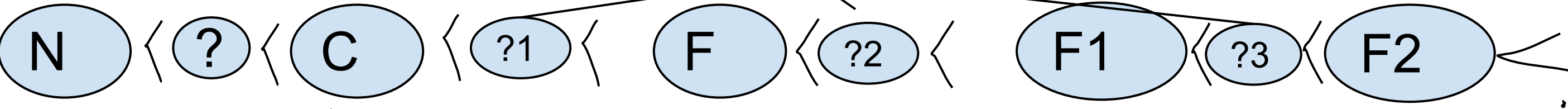
пусть есть взаимнооднозначное соответствие между множеством {f}
и множеством элементов из множества X
составим ф-ию $\phi(x) = 1 - f_x(x)$
 $\phi(x)$ принимает только значения 0 и 1 (если из 1 вычесть либо 0 либо
1 получится либо 0 либо 1)
какому элементу соответствует $\phi(x)$, пусть она соответствует
элементу b, а элементу **b в свою очередь соответствует $f_b(x)$**
 $\phi(x) = 1 - f_x(x) = f_b(x)$
подставляем в это ур-ие значение $x=b$ (потому что равенство должно
быть верно при всех x, в том числе и при b)
 $1 - f_b(b) = f_b(b)$
 $f_b(b) = 1/2$ а должно быть равно 1
полученное противоречие доказывает, что мощности не равны.



$$2^X = P(f) > X$$

задача 3

аксиомы промежуточных множеств



аксиома
гипотезы
континуума

$$2^N$$

1) доказательств гипотеза континуума
Коэн 1959 году (метод форсинга)
Т. Йех “Теория множеств и метод форсинга”
2) с конца 80-х и до сегодня развивается наука “Булевозначный анализ” - теорема о
гипотезе континуума и все остальные промежуточные гипотезы доказываются легче, чем
методом форсинга