На числовой прямой даны два отрезка: $P = [17, 46]$ и $Q = [22, 57]$. Отрезок A таков, что приведённая ниже формула истинна при любом значении переменной x:

$\neg(x \in A) \to (((x \in P) \wedge (x \in Q)) \to (x \in A))$

Какова **наименьшая** возможная длина отрезка A?

Решение.

Введем обозначения: $(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$A \vee (\neg(P \cdot Q) \vee A)$.

Применив закон де Моргана и правило упрощения, получаем:

$\neg P \vee \neg Q \vee A$.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хоть какое-то из утверждений. Выражение $\neg P$ истинно тогда, когда $x \in (-\infty, 17) \cup (46, \infty)$, а выражение $\neg Q$ истинно тогда, когда $x \in (-\infty, 22) \cup (57, \infty)$. Следовательно, A должно быть истинно как минимум на отрезке [22; 46]. Длина отрезка равна $46 - 22 = 24$.

Ответ: 24.