На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3, 38]$ и $Q = [21, 57]$. Какова наибольшая возможная длина интервала A, что логическое выражение

$$((x \in Q) \to (x \in P)) \to \neg(x \in A)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Преобразовав, получаем:

$(\neg Q \lor P) \to \neg A = Q \land \neg P \lor \neg A$.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Логическое И истинно, когда истинны оба утверждения. Условию $Q \land \neg P = 1$ удовлетворяет отрезок $(38; 57]$. Поскольку выражение $Q \land \neg P \lor \neg A$ должно быть тождественно истинным, выражение $\neg A$ должно быть истинно на лучах $(-\infty; 38]$ и $(57; +\infty)$. Значит, наибольшая возможная длина интервала A равна $57 - 38 = 19$.

Ответ: 19.

Примечание 1.

О длине отрезка написано в примечании к задаче 11119.

Примечание 2.

Предостерегаем читателей от решения этой и подобных задач с помощью программ, реализующих метод перебора. В программах, которые предлагают наши читатели, в качестве границ отрезка используются целые числа, и длина отрезка определяется как разность между ними. Такие программы будут давать неверный результат, если интервал A не является отрезком, то есть одна или обе из его границ ему не принадлежат. В частности, в данной задаче число 38 не должно принадлежать интервалу A, следовательно, программой будет найдена левая граница, равная 39, и правая граница, равная 57, в результате чего длина интервала A получится равной 18. Однако в задаче рассматриваются не целые, а вещественные числа, поэтому длина интервала $(38; 57]$ равна 19.