На числовой прямой даны два отрезка: P = [1, 39] и Q = [23, 58]. Какова наибольшая возможная длина интервала A, что логическое выражение

$((x \in P) \to \neg(x \in Q)) \to \neg(x \in A)$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Преобразовав, получаем:

$\neg(P \to \neg Q) \lor \neg A = P \land Q \lor \neg A$.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Логическое И истинно, когда истинны оба утверждения. Условию $P \land Q = 1$ удовлетворяет отрезок [23;39]. Поскольку выражение $P \land Q \lor \neg A$ должно быть тождественно истинным, выражение $\neg A$ должно быть истинно на лучах $(-\infty, 23)$ и $(39, \infty)$. Значит, наибольшая возможная длина интервала A равна $39 - 23 = 16$.

Ответ: 16.