На числовой прямой даны два отрезка: $P = [20, 50]$ и $Q = [30,65]$. Отрезок A таков, что формул

$\neg(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow \neg (x \in Q))$

истинна при любом значении переменной x. Какова наименьшая возможная длина отрезка A?

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A; (x \in P) \equiv P; (x \in Q) \equiv Q.$

Преобразовав, получаем:

$\neg A \rightarrow (\neg P \vee \neg Q) = A \vee \neg P \vee \neg Q.$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Логическое И истинно, когда истинны оба утверждения. Условию $\neg P \vee \neg Q = 1$ удовлетворяют лучи $(-\infty; 30)$ и $(50; +\infty)$. Поскольку выражение $A \vee \neg P \vee \neg Q$ должно быть тождественно истинным, выражение A должно быть истинно на отрезке $[30, 50]$. Следовательно, наименьшая длина отрезка A равна $50 - 30 = 20$.

Ответ: 20.

Примечание 1.

Следует различать задания «найдите длину отрезка» и «найдите количество целых чисел на отрезке».

Длина отрезка равна расстоянию между его граничными точками. Длину отрезка можно вычислить по формуле $m-n$, где m и n — правая и левая границы этого отрезка соответственно. Длина отрезка не зависит от того, включены ли в него его границы. Заметим, однако, что если границы не включены, то должно использоваться слово «интервал», а не слово «отрезок».

Количество целых чисел на отрезке можно найти по формуле $m - n + 1$, где m и n — правая и левая границы этого отрезка соответственно, причем они входят в отрезок.

Примечание 2.

Предостерегаем читателей от решения этой и подобных задач с помощью программ, реализующих метод перебора. В программах, которые предлагают наши читатели, в качестве границ отрезка используются целые числа, и длина отрезка определяется как разность между ними. Такие программы будут давать неверный результат, если интервал A не является отрезком, то есть одна или обе из его границ ему не принадлежат. Примером такой задачи является задача