На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 10]$ и $Q = [6, 14]$. Какова наибольшая возможная длина интервала A, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$\neg A \vee P \vee Q$.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Выражение $P \vee Q$ истинно на отрезке $[2; 14]$. Поскольку все выражение должно быть истинно для любого x, выражение $\neg A$ должно быть истинно на множестве $(-\infty; 2) \cup (14; \infty)$. Таким образом, выражение A должно быть истинно только внутри отрезка $[2;14]$. Значит, наибольшая длина отрезка равна $14 - 2 = 12$.

Ответ: 12.