На числовой прямой даны два отрезка: $P = [22, 72]$ и $Q = [42, 102]$. Какова наименьшая возможная длина интервала A, что логическое выражение

$$\neg(\neg(x \in A) \land (x \in P)) \lor (x \in Q)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Преобразовав, получаем:

$$\neg(\neg A \land P) \lor Q = A \lor \neg P \lor Q.$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условию $\neg P \lor Q = 1$ удовлетворяют лучи $(-\infty;22)$ и $[42; +\infty)$. Поскольку выражение $A \lor \neg P \lor Q$ должно быть тождественно истинным, выражение A должно быть истинно на отрезке $[22, 42)$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $42 - 22 = 20$.

Ответ: 20.

Примечание 1.

О длине интервала написано в примечании к задаче 11119.

Примечание 2.

Предостерегаем читателей от решения этой и подобных задач с помощью программ, реализующих метод перебора. В программах, которые предлагают наши читатели, в качестве границ отрезка используются целые числа, и длина отрезка определяется как разность между ними. Такие программы будут давать неверный результат, если интервал A не является отрезком, то есть одна или обе из его границ ему не принадлежат.