На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3, 13]$ и $Q = [12, 22]$. Какова наибольшая возможная длина интервала A, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$$(x \in A) \equiv A;\ (x \in P) \equiv P;\ (x \in Q) \equiv Q.$$

Применив преобразование импликации, получаем:

$$(A \rightarrow P) \vee Q = \neg A \vee P \vee Q.$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условию $P \vee Q = 1$ удовлетворяет отрезок $[3; 22]$. Поскольку выражение $\neg A \vee P \vee Q$ должно быть тождественно истинным, выражение $\neg A$ должно быть истинно на множестве $(-\infty; 3) \cup (22; \infty)$. Значит, наибольшая возможная длина интервала A равна $22 - 3 = 19$.

Ответ: 19.