На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 39]$ и $Q = [23, 58]$. Какова наименьшая возможная длина интервала A, что формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \to ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$(P \wedge Q) \to (Q \wedge A) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (Q \wedge A)$.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условие $\neg(P \wedge Q) = 1$ истинно на множестве $(-\infty, 23) \cup (39, \infty)$. Поскольку выражение $\neg(P \wedge Q) \vee (Q \wedge A)$ должно быть тождественно истинным, выражение $Q \wedge A$ должно быть истинным на множестве $[23; 39]$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $39 - 23 = 16$.

Ответ: 16.