На числовой прямой даны два отрезка: $P = [23, 58]$ и $Q = [1, 39]$.
Какова наименьшая возможная длина интервала A, что формула

$$((x \in P) \vee (x \in A)) \to ((x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$$(P \vee A) \to (Q \vee A) = \neg(P \vee A) \vee (Q \vee A).$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Наибольший интервал на котором $\neg(P \vee A)$ истинно получится, если отрезок A попадает внутрь отрезка P. Тогда это выражение истинно на интервале $(-\infty; 23) \cup (58; \infty)$. Также необходимо, чтобы выражение $(Q \vee A)$ было истинно на отрезке $[23; 58]$. Поскольку $Q = [1, 39]$, можно взять отрезок $A = (39, 58]$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $58 - 39 = 19$.

Ответ: 19.