На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8, 39]$ и $Q = [23, 58]$.

Какова наименьшая возможная длина интервала A, при которой выражение

$$((x \in P) \vee (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$(P \vee A) \rightarrow (Q \vee A) = \neg(P \vee A) \vee (Q \vee A)$.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Наибольший интервал, на котором $\neg(P \vee A)$ истинно, получится, если отрезок A попадает внутрь отрезка P. Тогда это выражение истинно на интервале $(-\infty; 8) \cup (39; \infty)$. Также необходимо, чтобы выражение $(Q \vee A)$ было истинно на отрезке $[8; 39]$. Поскольку $Q = [23, 58]$, можно взять полуинтервал $A = [8, 23)$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $23 - 8 = 15$.

Ответ: 15.