На числовой прямой даны два отрезка: $P = [17, 54]$ и $Q = [37, 83]$. Какова наименьшая возможная длина интервала A, что формула

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \land \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$$P \to ((Q \land \neg A) \to \neg P) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q \lor A \lor \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q \lor A.$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условие $\neg(P \land Q)$ истинно на множестве $(-\infty, 37) \cup (54, \infty)$. Тогда A должно быть истинным на множестве $[37; 54]$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $54 - 37 = 17$.

Ответ: 17.