На числовой прямой даны два отрезка: $P = [19; 84]$ и $Q = [4; 51]$. Укажите **наименьшую** возможную длину такого отрезка A, для которого формула

$$(x \in P) \to (\neg(x \in Q) \to \neg((x \in P) \wedge \neg(x \in A)))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом значении переменной x).

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$$P \to (\neg Q \to \neg(P \wedge \neg A)) = \neg P \vee Q \vee \neg P \vee A = \neg P \vee Q \vee A.$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условие $\neg P \vee Q$ истинно на множестве $(-\infty, 51] \cup (84, +\infty)$. Тогда A должно быть истинным на множестве $(51; 84]$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $84 - 51 = 33$.

Ответ: 33.