На числовой прямой даны два отрезка: $P = [69; 91]$ и $Q = [77; 114]$. Укажите **наименьшую** возможную длину такого отрезка A, для которого формула

$$(x \in Q) \to (((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \to (x \in A)))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом значении переменной x).

Решение.

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$\neg Q \vee (P \equiv Q) \vee P \vee A$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условие $\neg Q \vee (P \equiv Q) \vee P$ истинно на множестве $(-\infty; 91] \cup (114; +\infty)$. Тогда A должно быть истинным на множестве $(91; 114]$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $114 - 91 = 23$.

Ответ: 23.