

- а) Существуют ли четыре таких различных натуральных числа, что сумма каждых трёх из них есть простое число?
- б) Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что сумма каждых трёх из них есть простое число?

а) Существуют; б) не существуют.

Существуют ли такие

- а) 4 различных натуральных числа;
 - б) 5 различных натуральных чисел;
 - в) 5 различных целых чисел;
 - г) 6 различных целых чисел,
- что сумма каждых трёх из них – простое число?

Решение

а) Пример такой четвёрки чисел: 1, 3, 7, 9. Из этих чисел можно образовать четыре тройки; их суммы – 11, 13, 17 и 19.

Еще один пример, в котором сами исходные числа – тоже простые: 7, 13, 23, 53.

б) Среди любых пяти целых чисел либо найдутся три, дающих одинаковые остатки при делении на 3, либо найдутся три, дающих попарно различные остатки при делении на 3. В любом случае их сумма делится на 3 и больше 3.

в) Два примера.

- 1) -9, -3, 15, 25, 31; соответствующие суммы: 3, 13, 19, 31, 37, 47, 37, 43, 53, 71.
- 2) -11, -5, 19, 23, 29; соответствующие суммы: 3, 7, 31, 37, 13, 37, 41, 43, 47, 71.

г) Заметим, что если $a_1 < \dots < a_6$, то $a_1 + a_2 + a_3$ и $a_1 + a_2 + a_4$ – две наименьшие из сумм троек чисел. Значит, каждая из остальных сумм больше 3.

Рассмотрим теперь остатки от деления на 3 сумм троек из чисел a_2, a_3, \dots, a_6 . Сумма некоторых трёх из этих чисел кратна 3 (см. б)). Так как эта сумма больше 3, то она – составное число.

Ответ

а), в) Существуют; б), г) не существуют.

