

Определение. Число C называется точной верхней гранью для числового множества M , если выполняются два условия:
 1) для любого $x \in M$ верно неравенство $x \leq C$,
 2) для любого $C' < C$ найдется $x \in M$ такой, что $x > C'$.

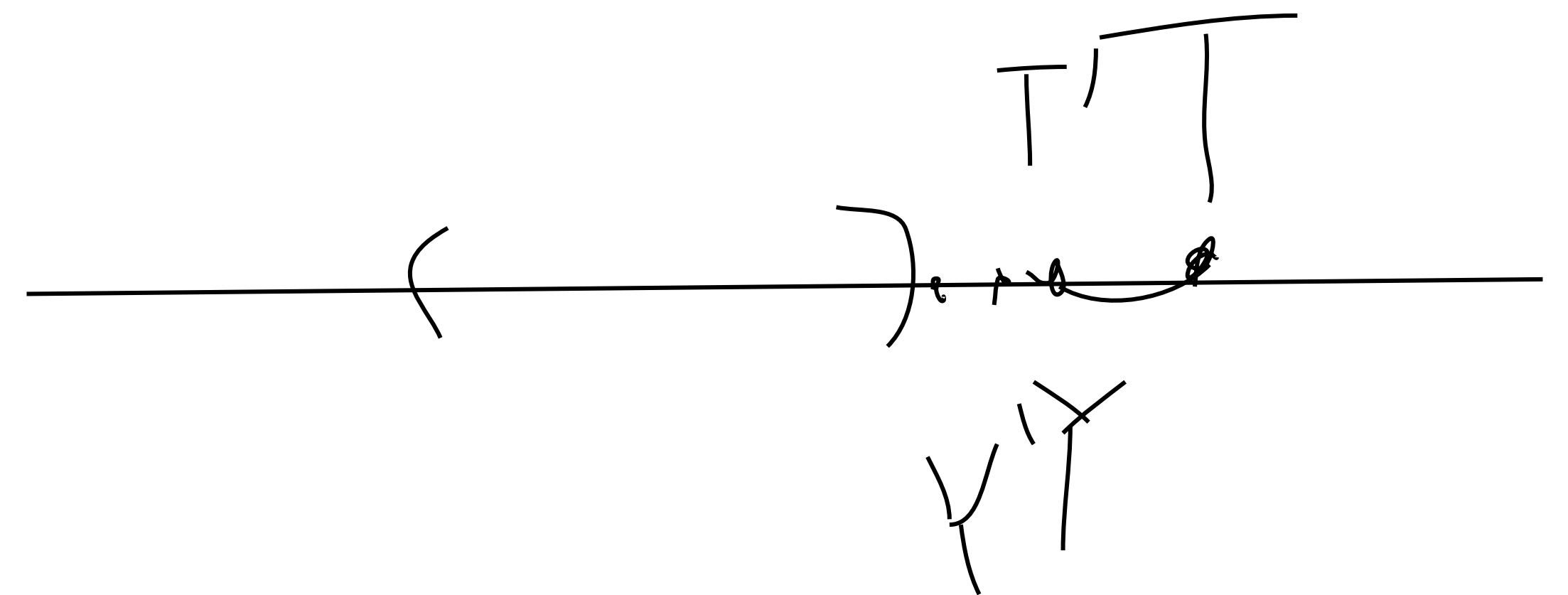
Задачи.

3. Если для множества есть точная верхняя грань, то только одна.
 4. Доказать, что для непустого ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань.

$\inf X$
 $\sup X$

Рассуждаем от противного:

Пусть в нашем множестве нет точной верхней грани, т.е. для любой верхней грани Y пункт 2 не верен, т.е. для любого Y найдется элемент, меньший чем он (Y'), для которого не найдется $x \in M$, такой, что $x > Y'$



- 1) есть верхняя грань T
- 2) нет наибольшего элемента
- 3) и есть ограниченное множество M

Доказать с наскока, что у множества, ограниченного сверху и не имеющего наибольшего элемента es , есть точная верхняя грань - НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ

3. Единственность точной верхней грани

Если новая точная верхняя грань будет больше прежней, то для предыдущей должен выполняться пункт 2: по пункту 2 предыдущую грань мы берем как C' , но для C' не будет выполняться нужное неравенство, так как до этого C' удовлетворял неравенству из пункта 1

Если новая точная верхняя грань D будет больше C , тогда для D выполняется пункт 2, в частности возьмем в $D'=C$, т.к. $C < D$ и C годится на роль D' . Но должен найтись $x > D'=C$, а такого x быть не может т.к. для любого $x < C$. Противоречие.

Если новая точная верхняя грань D будет меньше C , тогда для D выполняется пункт 1, но по пункту 2 для C , найдется $x \in M$ который будет $> D$ (Если D взять в качестве C'), что противоречит пункту 1 для D

4. Существование точной верхней грани для ограниченного сверху множества

рассмотрим 2 случая:

- 1) во множестве M есть наибольший элемент, тогда C =наибольшему, т.к. пункт 1 доказывается по определению наибольшего
- пункт 2 доказывается так: в качестве $x > C'$ для любого $C' < C$ берем сам C , т.к. он элемент множества
- 2) во множестве M нет наибольшего элемента

Если множество M ограничено сверху в нем есть верхняя грань T