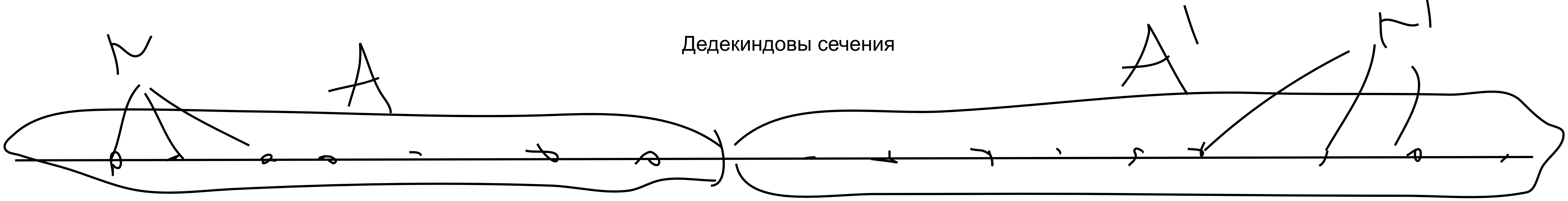
Дедекиндовы сечения



Дедекиндовы сечения в области рациональных чисел - это разбиение множества всех рациональных чисел на 2-е части A и A':
а) любое r э Q попадает либо в A, либо в A'
б) любое r э A < любого r э A'

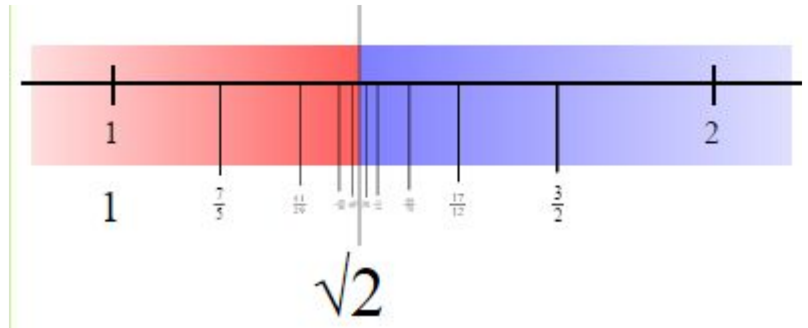
КАКИЕ БЫВАЮТ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДЕДЕКИНДОВЫ СЕЧЕНИЯ

1)бывают ли сечения, в которых есть наименьший элемент в верхнем классе?
A' = {x э Q : x>=5}
A = {x э Q : x< 5}

2)бывают ли сечения, в которых нет наименьшего элемента в верхнем классе и наибольшего в нижнем классе?
A' = {x э Q : x^2>2}
A = {x э Q : x^2< 2}

3)как доказать, что не существует рационального числа r: r^2=2
по сути надо показать, что r не может быть несократимой дробью, пусть может быть дробью
r = p/q
p^2 = 2q^2

p=2k+1
(2k+1)^2=2q^2
4k^2+4k+ 1=2q^2   неч = чет, противоречие



4)как доказать, что для такого сечения в нижнем классе нет наибольшего?
надо доказать, что для любого x э A: найдется n, что (x+1/n)^2 < 2
x^2 + 2 * x/n + 1/(n^2) < 2
2 * x/n + 1/(n^2) < 2-x^2
2 * x/n + 1/n < 2-x^2
(2x + 1)/n < 2 - x^2
n > (2x + 1)/(2 - x^2)
это удастся сделать по аксиоме Архимеда, один из отрезков (2x + 1)/(2 - x^2) второй отрезок 1, и ты всегда сможешь взять 1-цу n раз так, что перевалишь через 1-ый отрезок

1/n^2 < 1/n

5)может ли быть сечение в области рац чисел, у которого в нижнем есть наибольший, в верхнем есть наименьший