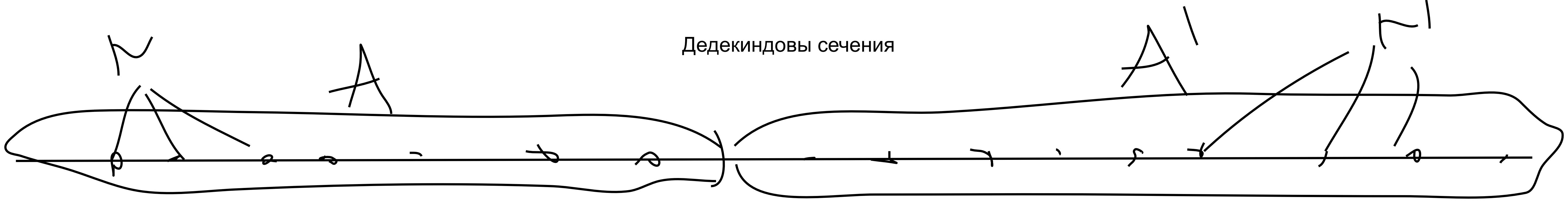
Дедекиндовы сечения



Дедекиндовы сечения в области рациональных чисел - это разбиение множества всех рациональных чисел на 2-е части A и A':
а) любое r э Q попадает либо в A, либо в A'
б) любое r э A < любого r э A'

КАКИЕ БЫВАЮТ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДЕДЕКИНДОВЫ СЕЧЕНИЯ

1)бывают ли сечения, в которых есть наименьший элемент в верхнем классе?

2)бывают ли сечения, в которых нет наименьшего элемента в верхнем классе и наибольшего в нижнем классе?

A' = {x э Q : $x^2>2$}верхний
A = {x э Q : $x^2< 2$}нижний

3)как доказать, что не существует рационального числа r: $r^2=2$
r=+-V2
Назовем число рациональным, если его можно представить в виде p/q, где p-целое и q-натурально (и при этом можно считать дробь p/q несократимой)
Пусть есть такое число
$p^2/q^2=2$
$p^2=2q^2$
Докажем, что P делится на 2.
Пусть P не делится на 2 P=2x+1
$(2x+1)^2=2q^2$
$4x^2+4x+1=2q^2$
чет+чет+1=чет => противоречие => P=2x
$4x^2=2q^2$
$2x^2=q^2$ => q//2
из того что p///2 и q//2 имеем противоречие с несократимостью => V2 - иррац

4)как доказать, что для такого сечения в нижнем классе нет наибольшего?
потому что для любого рац числа x из нижнего класса найдется рациональное число x+1/n тоже из нижнего класса

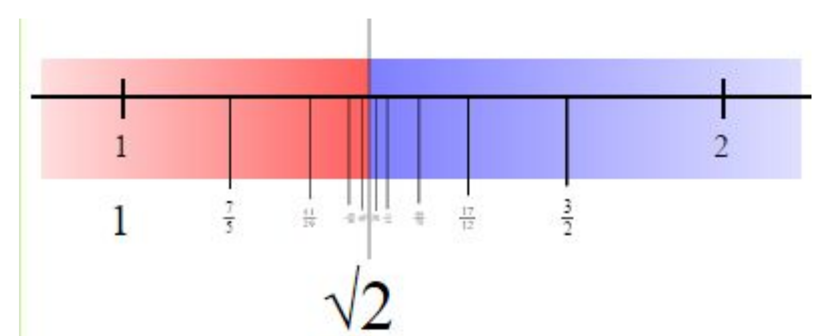
$x^2< 2$
$(x+1/n)^2< 2$
$x^2+2x/n+1/n^2< 2$
$2x/n+1/n^2< 2x/n+1/n < 2-x^2$
$2x/n+1/n< 2-x^2$
$(2x+1)/n< 2-x^2$ $\qquad$ $(2x+1)< n(2-x^2)$ $\qquad$ $(2x+1)/(2-x^2)< n$
$1/n< (2-x^2)/(2x+1)$
$n> (2x+1)/(2-x^2)$

5)может ли быть сечение в области рац чисел, у которого в нижнем есть наибольший, в верхнем есть наименьший

можно построить новое рац число (r1+r2) / 2 не попадет ни в один из классов, что противоречит определению дедекиндова сечения в области рац чисел

A=все рац отсюда (-oo;½)
A'=все рац отсюда [½;+oo)

A=все рац отсюда (-oo;V2)
A'=все рац отсюда [V2;+oo)

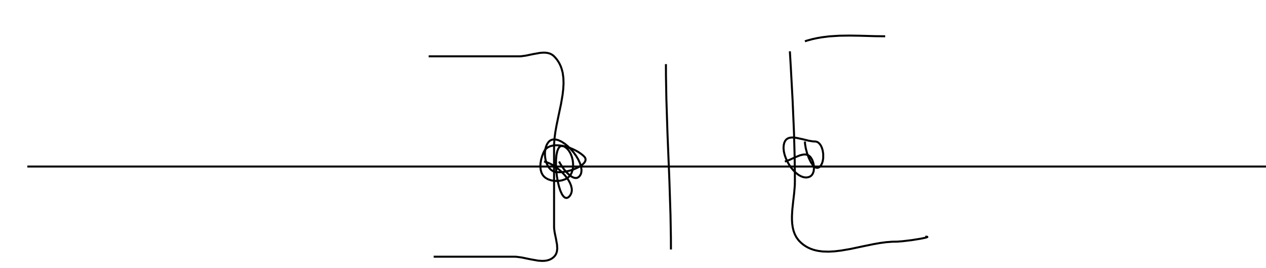


$x^2-2=0$
алгебр

Пи транс 1885
E транс 1915
log_2(3) 1925

$1/(n^2) < 1/n$

(r1+r2) / 2



r1 r2