

Теорема: любое ограниченное сверху множество имеет  $\sup$   
 $\supremum$  - точная верхняя грань

если есть максимальный в огр множестве  $M$ , то он и будет  $\sup$

если нет максимального эл-та ограниченном сверху  $M$ , то построим сечение в области вещ чисел:

в верхний возьмем все верхние, а в нижний все остальные числа (в том числе множество  $M$ ) => по теореме дедекинда либо в верхнем классе есть наименьшее - это и будет  $\sup$  (наименьшая из верхних граней), либо в нижнем классе есть наибольшее. Но второй вариант невозможен, потому что пограничное число  $Y$  не будет верхней гранью для множества  $M$ , а значит найдется элемент  $m$  из  $M$  больше пограничного числа. А раз он больше - значит он должен лежать в верхнем классе где лежат только верхние грани, а это противоречие. Значит второй вариант невозможен. Значит возможен единственный вариант, когда  $Y$  наименьший в верхнем класс, то он  $\sup$ .

