Отрезком [a,b] называется множество точек x, удовлетворяющих неравенствам: a ≤ x ≤ b при условии, что a < b

Интервалом (a,b) называется множество точек x, удовлетворяющих неравенствам: a < x < b при условии, что a < b

Система отрезков $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots,[a_n,b_n],\dots$ (до бесконечности) называется вложенной, если для любого натурального числа i верны неравенства: $a_i \le a_{i+1}$, $b_i \ge b_{i+1}$

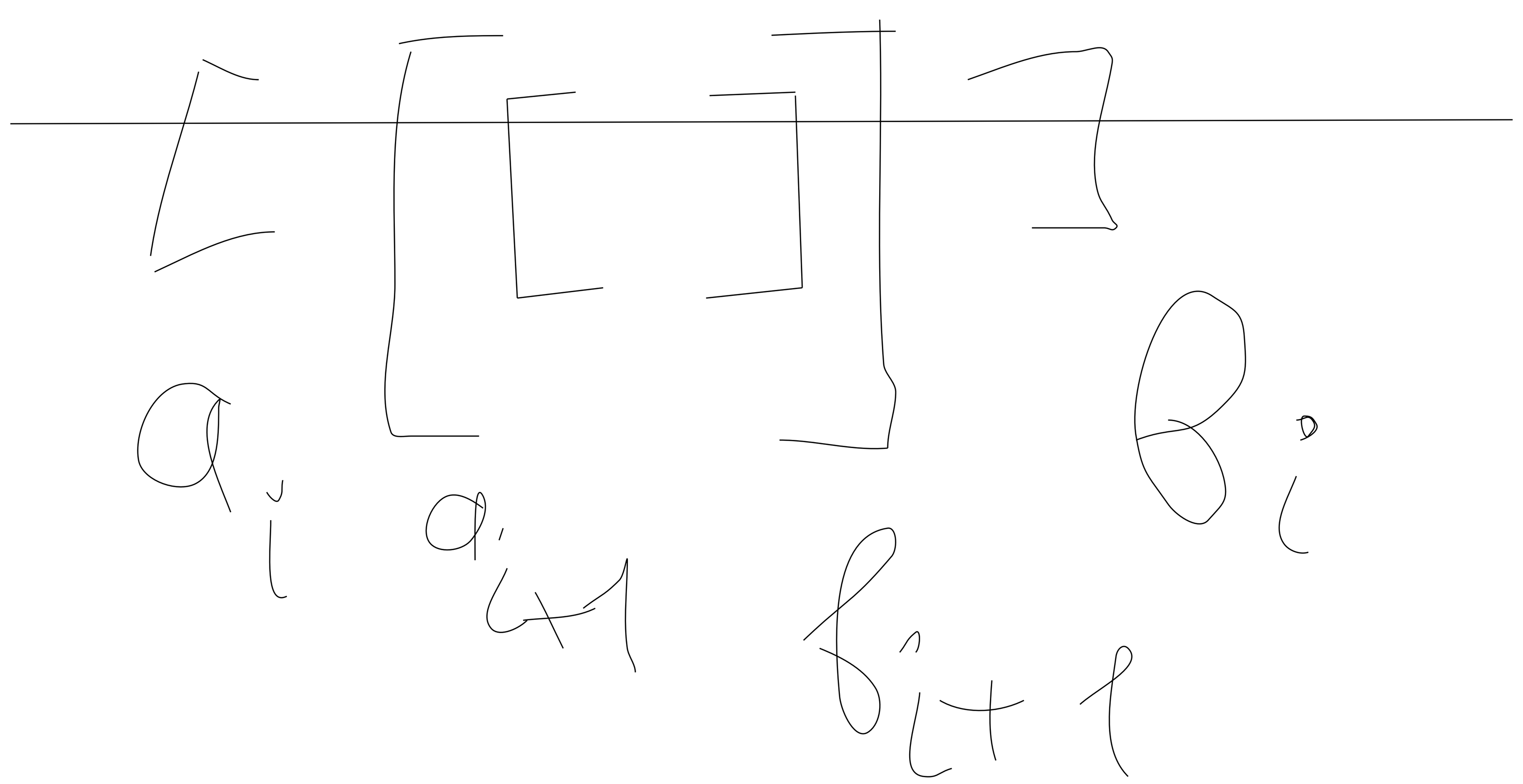
Аналогично определение вложенной системы интервалов.

Задачи
1) У вложенной системы отрезков всегда a_i< b_j (при любых натуральных i и j). Доказать.
2) Теорема: вложенная система отрезков всегда имеет хотя бы одну точку, принадлежащую всем отрезкам системы (общую точку системы). Доказать.
3) Покажите, что вложенная система интервалов не всегда имеет общую точку.

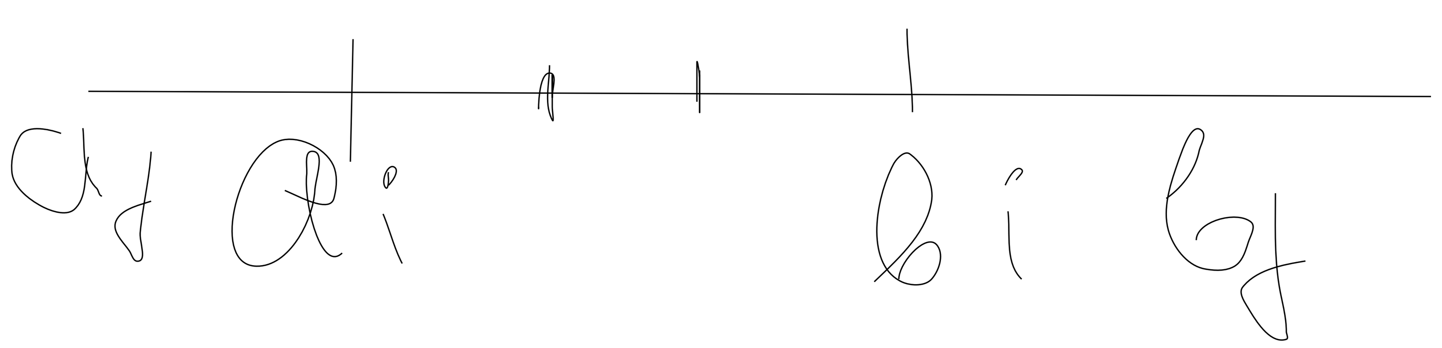
$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\,a_n, b_n\,]$$

Лемма о вложенных отрезках

лемма - вспомогательная важная теорема



ЗАДАЧА1
Пусть i=j => a<b по определению отрезка
Пусть i<j => ai<=aj так как j>i и $a_i \le a_{i+1}$ |
aj<bj по определению отрезка |=> ai<bj
Пусть i>j => ai<bi по определению отрезка |
bi<bj так как j<i и $b_i \ge b_{i+1}$ |=> ai<bj

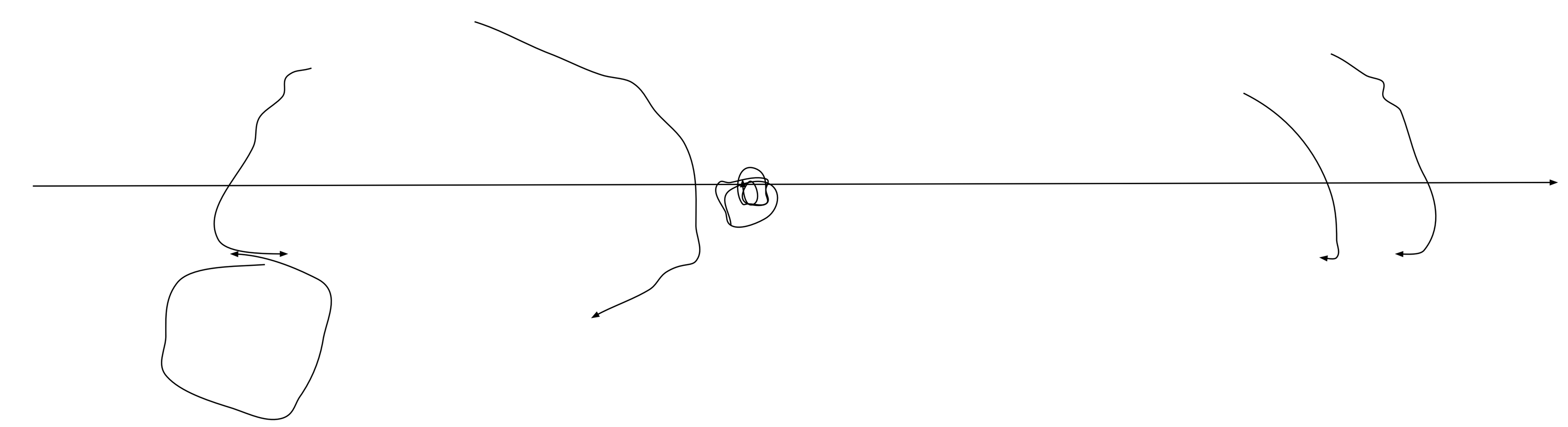


ЗАДАЧА2
В нижний класс войдут все a, войдут все числа самой левой a, все числа между любыми 2умя, а остальные попадут в верхний класс. По заданию 1, все a попадут в нижний класс, а все b в верхний(так как в противном случае если b попадет в нижний класс, она окажется между двумя a, что противоречит задаче 1)
Рассмотрим два случая по теореме Дедекинда.

1) Допустим в нижнем классе есть наибольший элемент. Значит это будет a[k], так как если наибольшее будет между a, то она не будет наибольшей, так как есть больше a. В этом случае эта точка будет общей для всех отрезков.
2) Допустим в верхнем классе есть наименьший элемент T. Возможны три варианта: мы попадем между b, в b или левее всех b, но правее всех a (по построению сечения). Первый случай не возможен, так как всегда есть b меньше T. Второй случай возможен так как b может также застыть, как a в предыдущем рассуждении. Третий случай тоже возможен, так как a и b все время движутся навстречу друг другу.

ЗАДАЧА3
Попробуй заморозить один из концов этой системы интервалов - это полдела, надо чтобы второй конец к первому ехал достаточно быстро

(0;1/n) - все хорошо, т.к, какую бы мы точку ни взяли, рано или поздно 1/n ее передет по направлению к 0



(0;1+1/n) - плохой пример, в этом случае b едет к замороженной a, но не достаточно быстро (никогда не переедет через 1)

вещественные числа задаются бесконечными приближениями с помощью рациональных чисел

V2=1	r=2	V5=2
V2=1.4	r=2	V5=2.2
V2=1.41	r=2.1	V5=2.23