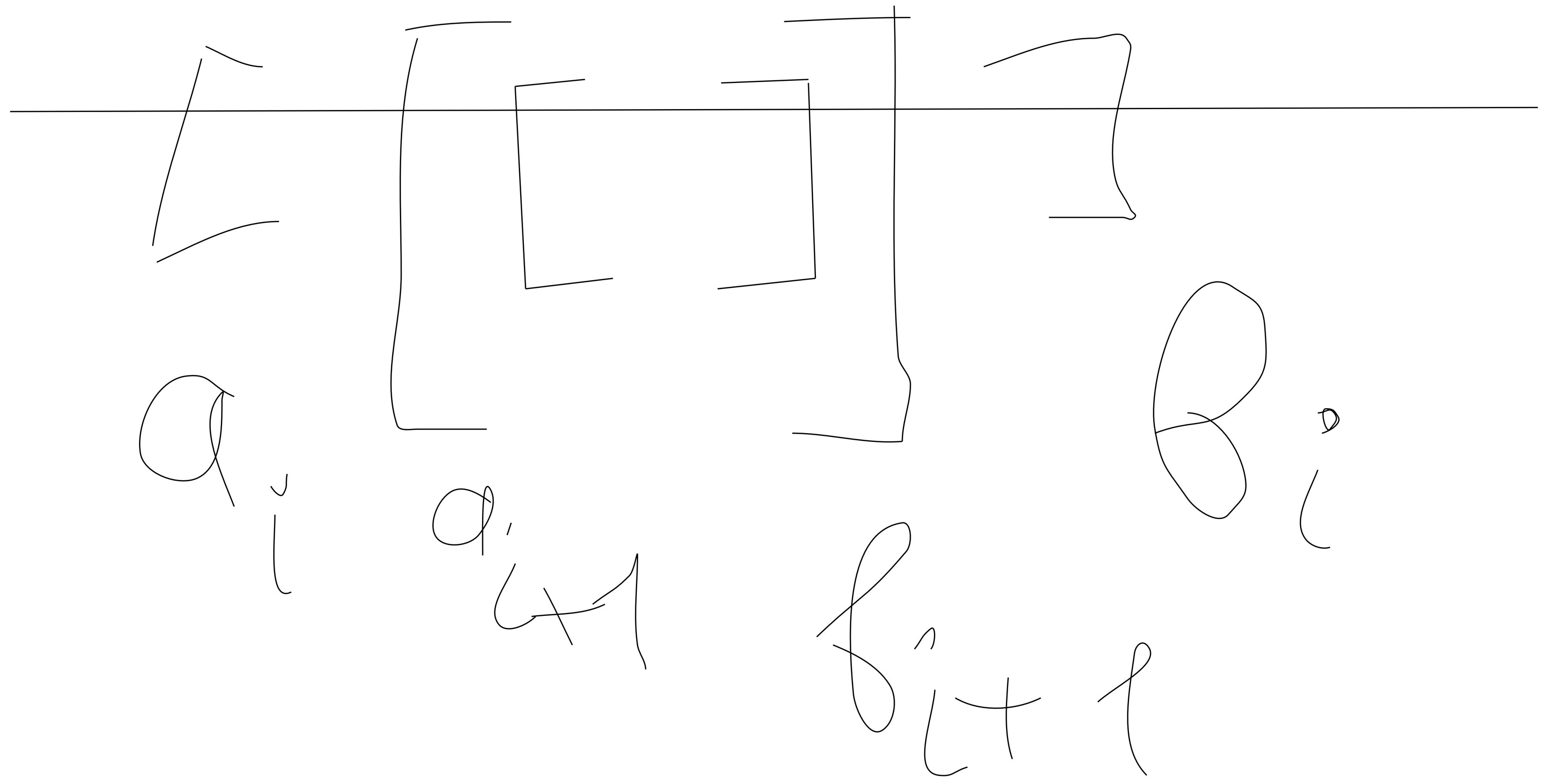
Отрезком [a,b] называется множество точек x, удовлетворяющих неравенствам: a ≤ x ≤ b при условии, что a < b

Интервалом (a,b) называется множество точек x, удовлетворяющих неравенствам: a < x < b при условии, что a < b

Система отрезков $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_n,b_n],\ldots$ (до бесконечности) называется вложенной, если для любого натурального числа i верны неравенства: $a_i \le a_{i+1}$, $b_i \ge b_{i+1}$

Аналогично определение вложенной системы интервалов.

Задачи
1) У вложенной системы отрезков всегда a_i< b_j (при любых натуральных i и j). Доказать.
2) Теорема: вложенная система отрезков всегда имеет хотя бы одну точку, принадлежащую всем отрезкам системы (общую точку системы). Доказать.
3) Покажите, что вложенная система интервалов не всегда имеет общую точку.



Задача 1
Рассмотрим 3 случая:

1 случай: i<j из определения вложенных отрезков любое a_J>=a_i , а из определения отрезка b_J> a_J => a_i<b_J

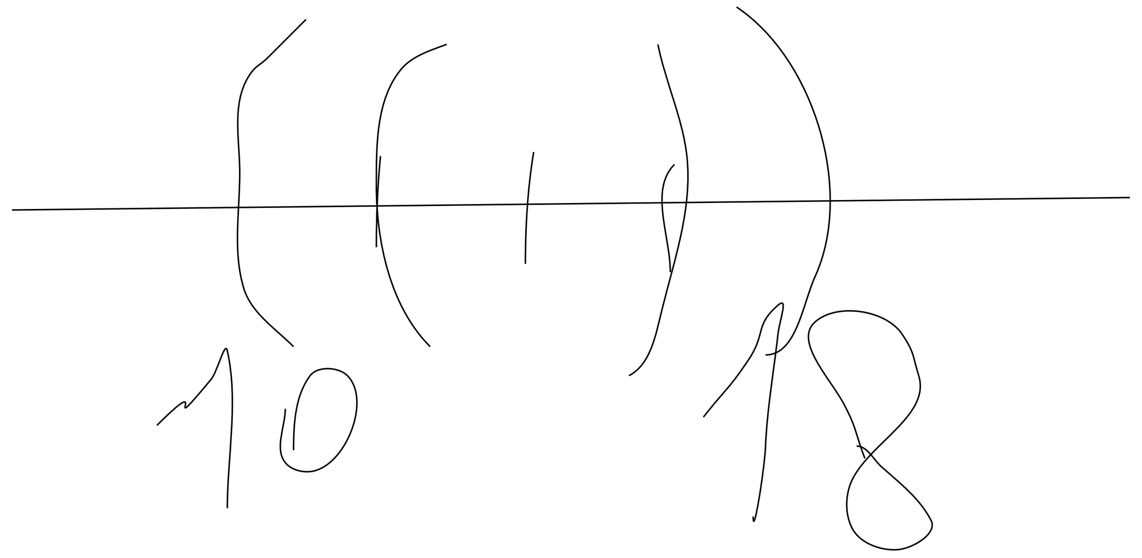
2 случай: i=j из определения отрезков a_i<b_i , а т.к. i=j , то b_J=b_i => a_i<b_J

3 случай i>j из определения вложенных отрезков любое a_i>=a_J , а из определения отрезка b_i>a_i => a_J<b_i
из определения вложенных отрезков b_i<=b_J => b_J>a_i   т.к. b_i по определению > a_i

Задача 2
Строим вещественные сечения. В нижнее берем все “a”, а в верхнее все “b”. По теореме Дедекинда либо в верхнем, либо в нижнем классе найдется наименьший или наибольший соответственно.
Пусть нашелся наименьший в верхнем классе, тогда он <= всех “b”, а так же > всех “a”(так как он лежит в верхнем классе сечения) => он лежит во всех отрезках
Пусть нашелся наибольший в нижнем классе, тогда он >= всех “a”, а так же < всех “b”(так как он лежит в нижнем классе сечения) => он лежит во всех отрезках

Задача 3

Пример 1 - система вложенных интервалов, где есть общая точка



Пример 2 - система вложенных интервалов, где нет общей точки

пусть одна точка равна 0, а другая 1/n

пусть у этой системы интервалов есть общая точка X!=0, тогда обязательно такой номер, что 1/n < X (достаточно взять n>1/X), поэтому этот X не попадет в систему интервалов и не будет общей точкой